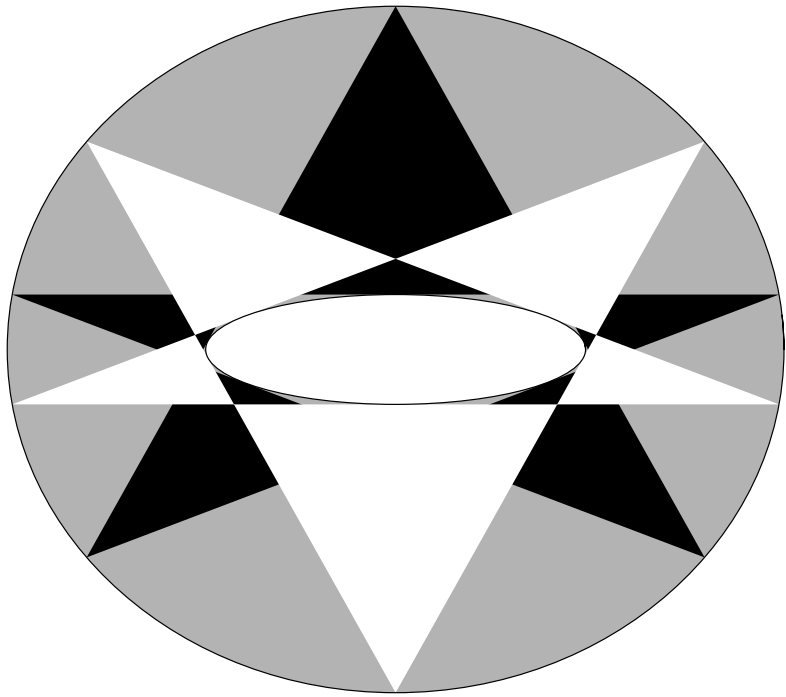


a
p
m
e
p

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public

Aix Marseille Vert

Bulletin de la régionale APMEP d'Aix-Marseille



- La journée de la Régionale
- La simulation en statistique
- Triangles et quadrilatères inscrits
- Jeux d'allumettes
- L'agenda du prof de maths

*Magazine paraissant trois fois par an
N°5 (Avril, Mai, Juin 2001)*

Éditorial

Catherine DUFOSSÉ

Nouveaux programmes : donnons notre avis !

C'est le printemps, et les fleurs sortent ! Attention, les nouveaux programmes de lycée aussi ! Pendant que les professeurs de collège se demandent à quelle sauce ils seront mangés, pendant que les professeurs des lycées technologiques attendent, comme d'habitude, qu'on veuille bien prendre la peine de s'apercevoir que dans leurs classes, il y a aussi des élèves, une rafale de nouveaux programmes est arrivée pour les sections L, ES et S !

A vos plumes, citoyens !

Allez les voir, lisez-les¹, donnez votre avis². Sinon, vous allez le regretter, et pour longtemps !! Internet a du bon : il permet à chacun de s'exprimer, il ne faut pas craindre d'en user, c'est à nous d'en faire un outil de la démocratie.

Ces programmes, nous les avons lus, et je vous avertis, il y a à redire. Nous ne devons pas laisser dormir en paix les experts du GEPS ! Nous devons donner notre avis, nous devons réclamer des programmes vivables, expliquer ce que nous faisons, ce que nous pouvons faire et ce que nous ne pouvons pas faire, ce que nos élèves sont capables d'apprendre et ce qui sera au dessus de leurs forces, sauf à transformer l'enseignement des mathématiques en un catalogue triste de recettes.

L'APMEP a déjà longuement discuté pour défendre le point de vue des professeurs du terrain : elle a dit et répété que nous ne pouvons pas enseigner des programmes trop lourds, que l'apprentissage et la pratique de notions nouvelles demande du temps, que le texte doit être assez précis pour guider le travail des professeurs, et que s'il est trop flou, ce sont les sujets de bac qui décideront des contenus enseignés !

Certes, c'est un exercice difficile que d'écrire des programmes pour un enseignement de masse qui soit de qualité. Mais il faut faire le pari que c'est possible et nous savons que ce pari peut être gagné, nous qui sommes dans les classes. On peut allier ambition et réalisme, mais il faut accepter d'en payer le prix, en donnant le temps aux élèves d'« avaler » les difficultés.

Exemple : les probabilités continues en terminale S, c'est beaucoup trop difficile : lisez le détail du texte, chaque ligne recèle une difficulté, et les « on admettra que » sont trop fréquents. Nous devons être nombreux à dire non, pour que la sagesse l'emporte.

Autre sujet de préoccupation : la question des limites. Les limites de suites sont traitées avec insistance, mais le texte est étrangement muet sur la question des limites de fonction : c'est le vide total, et personne ne peut comprendre ce qui est attendu.

Nous ne prétendons pas savoir ce qui sera utile ou inutile à la science et à la technique du 21^e siècle, nous n'entendons parler de leur évolution que par oui-dire et nous ne sommes pas des experts sur cette question. Mais nous voulons au moins des textes explicites, compréhensibles, compatibles avec les connaissances de nos élèves et avec l'horaire disponible.

Est-ce vraiment trop demander ?

1. Site du GEPS : <http://www.ac-poitiers.fr/gtdmaths/>
Pour aller directement à la consultation sur les programmes de mathématiques :
http://www.eduscol.education.fr/disc_h/default.htm.

2. Site officiel de l'Education Nationale : <http://www.eduscol.education.fr/>

La journée de la Régionale du 19 Mai

La journée annuelle de la Régionale d'Aix-Marseille se déroulera le
Samedi 19 Mai 2001 à l'I.U.F.M. de Marseille Canebière
à partir de 9 h 45.

Nous espérons que vous viendrez nombreux à cette journée, où les points forts seront :

Dans la matinée, la conférence d'Ahmed DJEBBAR qui a eu un gros succès aux journées Nationales 2000 à Nice

Dans l'après-midi, un grand choix d'ateliers sur des questions très actuelles touchant notre enseignement

Programme de la journée :

☐ **9 h 45 :** Accueil

☐ **10 h :** Conférence d'Ahmed DJEBBAR : Les mathématiques arabes.

Le sujet (histoire de l'algèbre), par son caractère « grand public », peut intéresser des élèves. Il y aura des places pour ceux-ci (environ 200). Les collègues qui désireraient y amener tout ou partie d'une classe devront contacter Yvon Poitevineau avant le 13 Mai, en précisant le nombre d'élèves que l'on veut faire venir.

☐ **11 h 45 :** Assemblée générale

☐ **12 h 45 :** Déjeuner

Pour ceux qui le désirent, nous pourrions nous retrouver à la brasserie ALCAZAR sur le cours Belzunce (plat du jour, dessert, café – 65 F). Pour réserver, contacter Yvon Poitevineau avant le 13 Mai, en précisant le nombre de personnes.

☐ **14 h 30 :** Ateliers (première plage)

☐ **16 h 15 :** Ateliers (seconde plage)

Les ateliers :

Cinq ateliers se dérouleront chacun deux fois, en parallèle sur les deux plages du programme, permettant à chacun de participer à deux ateliers de son choix.

☐ Maryvonne LEBERRE : L'évolution des collèges.

Maryvonne LEBERRE est secrétaire « Collèges » au bureau national de l'A.P.M.E.P. et consultante auprès du G.P.S.

☐ Pierre ESSEYRIC : Liaison primaire (cycle 3) — collège.

Pierre ESSEYRIC s'occupe de l'association « Maths en Stock » ; il présentera ici les « classes mathématiques » mises en place aux collèges de Laragne et de Veynes (05) au cours de cette année scolaire.

☐ Bernard EGGER : Les calculatrices font aussi des erreurs...

Bernard EGGER connaît bien les problèmes liés à l'utilisation des calculatrices et logiciels numériques et symboliques. Il proposera une réflexion sur des problèmes d'approximation liés à l'utilisation de ces outils.

- ❑ Christian MAUDUIT : Un nouveau sujet en spécialité E.S. : les graphes.
Le projet de programme pour l'enseignement de spécialité en terminale E.S. propose de consacrer une large part à la « théorie des graphes » ; de quoi s'agit-il?
- ❑ Roland CHIAVASSA : Encore et toujours La Statistique...
La Statistique prend une telle place dans les nouveaux programmes, que nous n'en saurons jamais assez sur la question. Roland CHIAVASSA nous propose de plancher à nouveau sur les échantillons, intervalles de confiance et sur quelques problèmes de statistique d'ordre.

Pour inscrire vos élèves à la conférence de A. Djebbar ou pour vous inscrire pour le déjeuner, contactez :

Yvon Poitevineau
213 Chemin du vallon de l'amandier
13 190 Allauch
ypoit@gulliver.fr
04 91 68 56 58

La simulation en statistique (suite)

Les nombres éleatoires

Bernard Egger

Simuler, c'est substituer au réel un virtuel contrôlé, avons-nous dit dans l'article précédent.

Cette opération demande un certain matériel. Les nombres au hasard en sont à coup sûr un élément essentiel. Sous forme de tables, ou à partir d'outils informatiques, ils sont indissociables de l'activité de simulation. Chacun sait que la naissance des ordinateurs doit beaucoup au besoin impérieux de disposer d'une liste considérable de nombres aléatoires afin de simuler les réactions en chaîne dans la fission nucléaire. Et il y a une certaine ironie à penser que simuler le hasard a participé grandement dans la création de ces objets purement déterministes que sont les ordinateurs.

Car la question est bien là: ce dont il s'agit c'est de simuler le hasard. Face à une liste de nombres, la question que l'on se pose n'est pas: « a-t-on une liste de nombres au hasard? », question qui n'aurait d'ailleurs pas beaucoup de sens, mais plutôt: « ces nombres peuvent-ils être considérés comme des nombres au hasard? ». Cette formulation a alors deux conséquences essentielles: il faut d'abord que nous soyons capable de définir ce que l'on considère comme une liste de nombres au hasard; ceci fait toute liste répondant aux critères précédents pourra être considérée comme liste de nombres au hasard, quel que soit le moyen utilisé pour la produire. Ces critères vont se traduire sous forme de tests que devra remplir une liste pour être une candidate acceptable à la fonction de liste de nombres aléatoires. Un mode de génération de listes de nombres aléatoires est jugé au travers de nombreuses listes qu'il a permis de construire et des résultats obtenus par ces listes à de nombreux tests.

Toutefois comme le fait remarquer Ivar IKELAND dans « Au hasard », on ne peut espérer que tout soit parfait car: « L'ordinateur peut tromper un test tout le temps, et tous les tests quelque temps, mais il ne peut pas tromper tous les tests tout le temps. » et plus loin, « le hasard, lui, saute spontanément tous les obstacles que l'on met sur son chemin ».

Tester la ressemblance avec le hasard

Qu'attendons-nous du hasard? En premier lieu l'imprévisibilité, mais une imprévisibilité ordonnée. Cette double contrainte a pour traduction mathématique: l'équiprobabilité. Le premier test à effectuer est donc celui de l'uniformité de la répartition. Sur un tableur (Excel par exemple), on peut facilement réaliser l'expérience pour les nombres aléatoires fournis par le logiciel

La fonction ALEA() retourne des nombres compris entre 0 et 1. Si l'on procède à une subdivision régulière de $[0; 1[$, par exemple en 20 intervalles, et que l'on procède au tirage d'une liste de 2000 nombres, on s'attend à trouver des effectifs à peu près égaux à 100 dans chacun des intervalles $[\frac{k}{20}, \frac{k+1}{20}]$, avec k entier variant de 0 à 19.

Pour simplifier le comptage, on peut s'apercevoir simplement que $x \in [\frac{k}{20}, \frac{k+1}{20}]$ si et seulement si $E(20x) = k$ (E représentant la partie entière). Par exemple sur trois échantillons de 2000 nombres aléatoires on obtient les résultats suivants:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
95	93	94	100	111	104	103	95	96	100	108	91	108	86
116	80	88	87	100	92	116	112	96	93	91	96	127	97
101	97	91	95	105	101	112	92	94	90	111	89	94	110

14	15	16	17	18	19
112	91	97	108	108	100
97	110	111	96	88	107
111	102	91	95	110	109

Les résultats obtenus sont satisfaisants, car n'oublions pas qu'il ne s'agit pas de dire: ces résultats prouvent que la répartition est uniforme, mais plutôt à la lecture de ces résultats on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la répartition soit uniforme. (Lire à ce propos l'article de Daniel SCHWARZ dans www.unil.ch/penombre/08/03.htm).

En effet la fluctuation d'échantillonnages, ces caprices du hasard selon Daniel SCHWARZ, même dans le cas d'une répartition totalement uniforme, écarte le plus souvent des valeurs égales à 100 pour chaque cas.

Quoi qu'il en soit, il est bien clair que l'on ne saurait en rester à une sensation : il faut des outils mathématiques permettant de confirmer la valeur du modèle.

Les pièges de l'uniformité

Il s'agit bien entendu du premier test à effectuer, mais son résultat globalement positif ne peut pas suffire, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Dans le dernier numéro de 3'33, magazine consacré aux calculatrices Casio, un article s'intitule : *Un algorithme de nombres aléatoires*.

L'auteur nous y présente une suite récurrente : $\begin{cases} 0 < u_0 < 1 \\ u_{n+1} = D(147u_n) \end{cases}$ avec $D(x) =$ partie décimale de x .

Cet algorithme est supposé produire d'une façon très simple des nombres aléatoires, et la vérification qui est proposé est bien sûr celle du test d'uniformité.

Examinons sur Excel ce que cela donne (du moins après avoir réglé quelques problèmes dont je parlerai à la fin). Pour une liste de 2000 nombres à partir de $u_0 = 0,124679$ comme le préconise l'auteur, on trouve les résultats suivants :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
102	90	89	97	112	104	99	95	93	125	85	94	107	108

14	15	16	17	18	19
107	101	101	109	87	95

Résultats qui à première vue ne sont pas vraiment moins satisfaisant que les nombres au hasard fournis par Excel. Mais si l'on examine ces « nombres aléatoires » avec un peu plus d'attention, un « petit » problème apparaît, alors qu'on ne l'avait pas identifié immédiatement (c'est le cas de l'auteur) :

0,124679
0,327813
0,188511
0,711117
0,534199
0,527253
0,506191
0,410077

Voici les huit premiers nombres de la liste.

Il saute aux yeux qu'ils ont tous 6 chiffres après la virgule.

Hasard ? Certainement pas !

Que se passe-t-il en fait ? Qu'est donc la partie décimale du produit de l'un de ces nombres par 147 ? Par exemple de 0,188511 par 147 : bien évidemment le reste de 188511×147 dans la division euclidienne par 1000000.

Ce qui implique bien entendu qu'il n'y a au plus que 1000000 « nombres aléatoires » possibles.

En fait, des considérations simples sur le chiffre des unités dans la multiplication par 7 permettent de réduire dans un premier temps ce nombre à 250000.

Excel ne nous est plus d'une aide suffisante.

Le logiciel Derive permet de mieux cerner le problème

```

deci(x) := x - FLOOR(x)
ITERATE(deci(147.x), x, 0.124679, 100000) =
.124679
ITERATE(deci(147.x), x, 0.124679, 100001) =
.327813

```

La fonction `deci` correspond à la partie décimale, et `ITERATE`, de syntaxe : `ITERATE(f(x), x, a, n)`, retourne le terme de rang n de la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = a$.

Voilà une liste de « nombres aléatoires » qui se réduit comme une peau de chagrin : au plus 100000 maintenant.

Bien entendu sur 2000 ou 3000 valeurs comme le propose l'article, on n'y voit que du feu. Pourtant nous avons ici *une suite périodique* (quel que soit le choix du terme initial, la seule différence étant alors la longueur de la période).

Et contrairement à ce que dit l'auteur, on peut dire bien d'autres choses sur cette suite que simplement qu'elle est bornée.

Si elle n'est pas un bon exemple d'un générateur de nombres aléatoires, elle en est un magnifique contre-exemple (et un bon exercice d'arithmétique).

Construire le hasard

Toutefois, et nous y reviendrons, la démarche imparfaite de l'article met le doigt sur ce qu'est « notre hasard » : un chaos déterministe, si l'on entend par chaos comme le fait Pascal DELAHAYE sur le site :

www.crdp.ac-grenoble.fr/imel/delahaye/chaos/infogene.htm

« un phénomène entièrement déterministe qui prend une allure aléatoire » (c'est-à-dire qui correspond à ce que l'on attend du « vrai hasard »).

Les générateurs des calculatrices sont des suites récurrentes chaotiques.

Celle de l'article est bien récurrente, mais assez peu chaotique. Pourtant si l'on n'y prend pas garde, elle peut paraître acceptable.

Un point essentiel aurait pu permettre facilement de la rejeter : on peut attendre d'une liste de nombres vraiment au hasard que les décimales d'un rang donné suivent elles aussi une répartition uniforme. Dans cet exemple la sixième décimale est plutôt gênante.

Cet article a donc une vertu (involontaire) : en dévoilant le mode de construction des générateurs qui sont essentiellement des suites chaotiques (si ce n'est plus tout à fait vrai pour certains logiciels sophistiqués, cela l'est encore pour les tableurs et les calculatrices, ce qui explique d'ailleurs que l'on peut théoriquement ou pratiquement réinitialiser ces générateurs-suites, même si les constructeurs ne le permettent pas toujours), il met en évidence un problème important : la précision permise par la calculatrice ou par le logiciel implique la finitude des possibles et donc la périodicité de la suite.

On peut donc peut-être imaginer qu'avec le choix d'un terme initial ayant 15 décimales par exemple après la virgule, l'algorithme proposé par l'article pourrait « fonctionner » aussi bien que le générateur de la calculatrice.

Pour trancher il va falloir affiner notre test. Ou plutôt en construire d'autres. Dans le prochain article, nous parlerons de deux d'entre eux, le premier pourrait s'appeler le test d'indépendance, et le deuxième est connu sous le nom de test du poker.

1 Les déboires des tableurs

Pour terminer il est bon de signaler les déboires d'Excel vis à vis de ... la multiplication.

	A
1	0,107
2	0,729
3	0,163
4	0,961
5	0,266999997
6	0,248999628

Le tableau ci-contre contient les premiers termes de la suite précédente avec $u_0 = 0,107$ calculé sur Excel (à gauche) et sur Star Office (à droite). La formule de la cellule A2 est bien sûr : =147*A1-ENT(147*A1)

0,107000000
0,729000000
0,163000000
0,961000000
0,267000003
0,249000441

Puis on recopie la formule vers le bas.

Nous avons expliqué plus haut que le nombre de décimales des termes successifs de la suite ne changeait pas. Quelle surprise donc avec A5, puis A6.

Il existe plusieurs autres situations où ce problème existe ; essayez par exemple la fonction « tente »

définie sur $[0; 1]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ f(x) = 2 - 2x & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Construisez alors une suite récurrente de premier terme 0,26 par exemple et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Examinez alors comment les erreurs dans la multiplication par 2 conduisent au bout d'une soixantaine de recopies à des résultats totalement aberrants (sur les autres tableurs également).

L'erreur commence très tôt comme le montre le tableau ci-dessous qui reprend le précédent avec 15 décimales :

0,107000000000000
0,728999999999999
0,1629999999998830
0,9609999999828030

Comment y remédier ? En utilisant systématiquement l'instruction ARRONDI :

	A
1	0,10700000000000000000000000000000
2	0,72900000000000000000000000000000
3	0,16300000000000000000000000000000
4	0,96100000000000000000000000000000
5	0,26700000000000000000000000000000
6	0,24900000000000000000000000000000
7	0,60300000000000000000000000000000

La cellule A2 contient maintenant la formule :

```
=ARRONDI(147*A1-ENT(147*A1);14)
```

L'affichage à 30 chiffres reste correct tout le temps.

À suivre ...

Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle, et circonscrits à un autre cercle (suite)

Françoise PÉCAUT

Le théorème de PONCELET, tel qu'énoncé par lui-même (cf. *A.M.V.* n° 3, *exergue*), est vrai si on y remplace le mot *cercle* par le mot *conique* :

Deux coniques étant donnés dans un plan, il est impossible, en général, d'inscrire dans l'une d'elles un polygone qui soit en même temps circonscrit à l'autre, et quand, pour une situation particulière de ces coniques, un tel polygone est possible, il y en a une infinité d'autres de même ordre qui jouissent de cette singulière propriété.

Pour démontrer le théorème dans le cas d'une paire de coniques d'un plan (W), après qu'il ait été démontré dans le cas des cercles, l'idée de PONCELET est de trouver un point S , n'appartenant pas à (W), et un plan (V), distinct de (W), tel que la projection conique de (W) sur (V) faite à partir de S envoie la paire de coniques sur une paire de cercles. C'est une idée naturelle puisque la projection conique conserve les intersections, alignements, contacts, et le degré des courbes. Nous allons la mettre en oeuvre dans le cas d'une ellipse et de son cercle orthoptique et en tirer la réciproque laissée en attente au paragraphe 3 (*A.M.V.* n° 3).

6 La famille des rectangles inscrits dans un cercle et circonscrits à une ellipse.

L'ensemble des points d'où l'on voit une ellipse sous un angle droit est un cercle, dit le cercle orthoptique de l'ellipse. Pour éviter des recherches au lecteur qui ne souhaiterait pas en faire, nous donnons une démonstration de ce théorème.

Considérons l'ellipse (\mathcal{E}) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé. $M_0(x_0, y_0)$ est un point du plan, $y - y_0 = t(x - x_0)$ est une équation de la droite (D) de pente t passant par M_0 . L'équation aux abscisses des points d'intersection de (\mathcal{E}) et (D) s'écrit :

$$b^2x^2 + a^2(y_0 + t(x - x_0))^2 = a^2b^2$$

Ordonnons cette équation du second degré à l'inconnue x :

$$x^2(b^2 + a^2t^2) + 2ta^2(y_0 - tx_0)x + a^2(y_0 - tx_0)^2 - a^2b^2 = 0$$

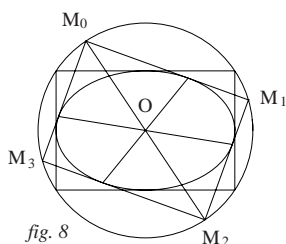
Pour que (D) soit tangente à (\mathcal{E}), il faut et il suffit qu'il y ait une racine double. Écrivons que le discriminant est nul. Après calculs :

$$t^2(a^2 - x_0^2) + 2tx_0y_0 + b^2 - y_0^2 = 0$$

Les deux racines t_1 et t_2 sont les pentes des deux tangentes à (\mathcal{E}) issues de M_0 . Les deux tangentes sont perpendiculaires si et seulement si $t_1t_2 = -1$:

$$a^2 - x_0^2 + b^2 - y_0^2 = 0 \implies x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$$

Ainsi le cercle \mathcal{O} d'équation $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, qui est circonscrit au rectangle $x = \pm a, y = \pm b$, est l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à l'ellipse (\mathcal{E}) (fig.8).

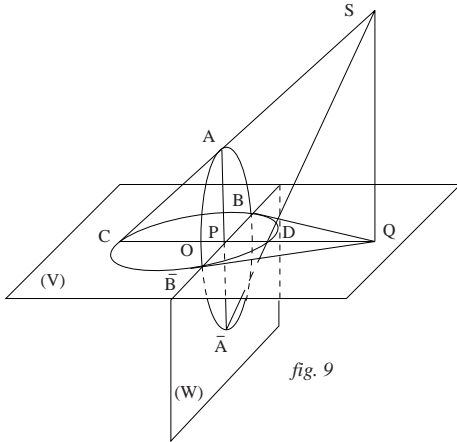


Montrons alors que tout point M_0 de \mathcal{O} est un sommet d'un quadrilatère interscriptible. Soit M_2 le symétrique de M_0 par rapport à l'origine O . Les tangentes à (\mathcal{E}) issues de M_0 (orthogonales) et les tangentes à (\mathcal{E}) issues de M_2 sont les quatre côtés d'un parallélogramme $M_0M_1M_2M_3$, qui a un angle droit, donc un rectangle, ce qui prouve que M_1 et M_3 appartiennent à \mathcal{O} .

Avec une ellipse et son cercle orthoptique, on a un exemple d'une paire de coniques permettant l'interscription de quadrilatères, qui sont tous des rectangles.

7 Une projection conique d'un cercle sur un plan dans l'espace à trois dimensions.

Soit, dans un plan (V) dit « horizontal », le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R .



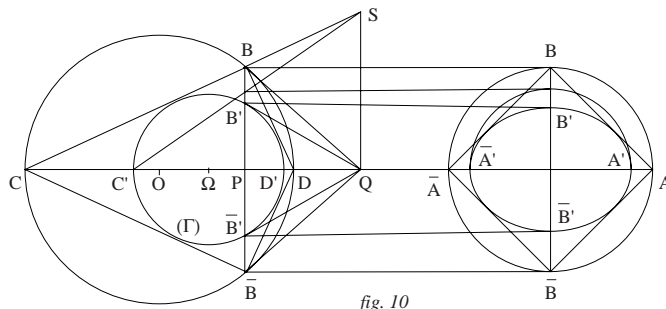
Soit Q un point de (V) strictement extérieur à $\mathcal{C}(O, R)$. Soient B et \bar{B} les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}(O, R)$ issues de Q . Soit (W) le plan perpendiculaire à (V) , coupant (V) suivant la droite $(B\bar{B})$. (W) sera dit « vertical », comme tout plan ou droite perpendiculaire à (V) . Soit S un point « au dessus » de Q , différent de Q . Étudions la figure transformée de $\mathcal{C}(O, R)$ dans la projection conique de (V) sur (W) , faite à partir de S : c'est une conique (\mathcal{E}) , puisque c'est l'intersection d'un cône du second degré avec un plan qui ne contient pas le sommet du cône.

Cette conique est du genre ellipse puisque le plan parallèle à (W) passant par le sommet du cône ne coupe pas $\mathcal{C}(O, R)$. (\mathcal{E}) passe par les points B et \bar{B} , invariants dans la projection. En B , la tangente à (\mathcal{E}) est l'intersection de (W) avec le plan tangent au cône le long de la génératrice (SB) : c'est la verticale de B . De même, la tangente à (\mathcal{E}) en \bar{B} est la verticale de \bar{B} . $(B\bar{B})$ est un diamètre de (\mathcal{E}) , puisque les tangentes à (\mathcal{E}) en B et en \bar{B} sont parallèles; c'est même un axe de (\mathcal{E}) puisque le diamètre $(B\bar{B})$ est perpendiculaire aux tangentes en B et \bar{B} . On en déduit que le centre de l'ellipse (\mathcal{E}) est le milieu P de $[B\bar{B}]$, et que l'autre axe de l'ellipse est porté par la verticale de P . Si C et D sont les extrémités du diamètre de $\mathcal{C}(O, R)$ porté par la droite (OQ) , (SC) et (SD) rencontrent (W) sur la verticale de P , en A et \bar{A} . Les quatre sommets de (\mathcal{E}) sont A, \bar{A}, B et \bar{B} . On peut vérifier que P est le milieu de $[A\bar{A}]$ de la manière suivante: la division (C, D, P, Q) est harmonique. Elle se transforme par projection conique sur (W) en (A, \bar{A}, P, ∞) : dire que celle-ci est harmonique, c'est dire que P est le milieu de $[A\bar{A}]$. Si on choisit S au dessus de Q de manière que $PA = PB$, (\mathcal{E}) est un cercle.

Dans la suite, la projection conique d'un cercle, explicitée au début de ce paragraphe, sera notée $p[\mathcal{C}, Q, S]$.

8 Une projection conique d'une paire de cercles de rayons R, ρ , de distance des centres $d < R$, ces trois paramètres étant tels que $2\rho^2(d^2 + R^2) = (R^2 - d^2)^2$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 4 (A.M.V. n° 4) la relation qui lie R, ρ, d entraîne l'existence d'un quadrilatère interscrit $CBD\bar{B}$. Un examen plus attentif (voir fig.5) prouve que la droite $(B\bar{B})$ a même pôle Q par rapport aux deux cercles [Cette propriété a en fait été démontrée dans ce même §4 par l'auteur - NDRL]. Les considérations du paragraphe précédent s'appliquent donc à une projection conique $p[\mathcal{C}(O, R), Q, S] = p[\Gamma(\Omega, \rho), Q, S]$ ($O\Omega = d < R$) sur le plan (W) perpendiculaire au plan de la figure le long de $(B\bar{B})$. C' et D' sont les points où $(O\Omega)$ coupe (Γ) , B' et \bar{B}' sont les points où la polaire de Q coupe (Γ) , P est le conjugué de Q par rapport aux deux cercles.



On choisit S de manière que la projection conique de $\mathcal{C}(O, R)$ sur (W) soit le cercle \mathcal{O} de diamètre $[\overline{B\overline{B}}]$ qui est représenté dans la partie droite de la figure 10. S a été représenté dans le plan des cercles \mathcal{C} et Γ par rabattement autour de la charnière $(O\Omega)$. Alors la projection conique de $\Gamma(\Omega, \rho)$ sur (W) est une ellipse (\mathcal{E}) dont deux sommets sont B' et \overline{B}' . Les deux autres sommets A' et \overline{A}' s'obtiennent par intersection de (SC') et (SD') avec (BB') , puis relèvement.

Le quadrilatère $CBD\overline{B}$ interscrit dans la paire (\mathcal{C}, Γ) se projette coniquement sur (W) en $AB\overline{A}\overline{B}$ interscrit dans la paire $(\mathcal{O}, \mathcal{E})$. Or $AB\overline{A}\overline{B}$ est un carré, par construction. De chacun de ses sommets, on voit (\mathcal{E}) sous un angle droit. C'est à dire que le cercle orthoptique de (\mathcal{E}) est (\mathcal{O}) . Alors prenons un point quelconque M_0 sur $\mathcal{C}(O, R)$. M_0 se projette sur (\mathcal{O}) en un point qui, comme tout point de (\mathcal{O}) , est sommet d'un rectangle interscrit dans la paire $(\mathcal{O}, \mathcal{E})$. Le rectangle se projette sur (V) suivant un quadrilatère interscrit dans la paire (\mathcal{C}, Γ) dont un sommet est M_0 . La réciproque laissée en attente au paragraphe 3 (A.M.V.n° 3) est démontrée.

Toute paire de deux cercles dans un plan, l'un intérieur à l'autre, permettant l'inscription de quadrilatères, est la projection conique d'une ellipse et de son cercle orthoptique.

Dans ce modèle centrosymétrique, il y a des alignements évidents: pour un quelconque rectangle interscrit (voir fig.8), les droites qui joignent deux sommets opposés, les droites qui joignent les points de contact de deux côtés opposés, passent par le centre de symétrie. Par projection conique, on en déduit le théorème:

Soit un quadrilatère interscrit dans les cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$, (Γ) intérieur à (\mathcal{C}) . Alors les diagonales du quadrilatère passent par le point limite intérieur aux deux cercles du faisceau linéaire de cercles qu'ils définissent. Il en est de même des droites qui joignent les points de contact avec (Γ) de deux côtés opposés du quadrilatère.

Le lecteur pourra vérifier sur la figure 3 (A.M.V. n° 3) que les quatre droites sont concourantes.

Dans la dernière partie de ce travail, nous verrons que, quelle que soit la paire de cercles (\mathcal{C}, Γ) , (Γ) intérieur à (\mathcal{C}) , on peut trouver un point Q ayant même polaire par rapport aux deux cercles. Alors la projection conique $p(Q, S)$ (cf. §7) envoie (\mathcal{C}) et (Γ) sur deux ellipses ayant les mêmes axes. Nous obtiendrons les relations métriques entre ces deux ellipses permettant d'inscrire triangles et quadrilatères. [Voir l'image de couverture du présent numéro – NDLR].

Fin du troisième épisode. Suite au prochain numéro ...

Jeux d'allumettes

Alain Barnier

Je veux présenter ici quelques jeux dits « **d'allumettes** » auxquels on peut faire jouer les élèves sans mettre le feu à l'établissement. On peut les faire jouer entre eux et on peut aussi organiser des tournois. Le but est de les faire réfléchir à la stratégie gagnante qui, pour la première catégorie de jeux, dits « **jeux de Nim à un tas** », est facile à comprendre sinon à découvrir. Et qui, pour la deuxième catégorie de jeux, dits « **jeux de Nim à plusieurs tas** », est bien plus compliquée mais a le mérite de faire réfléchir à la numération binaire. J'ai fait jouer mes élèves de lycée en fin d'année, ils ont été intéressés. La théorie générale de ces jeux se fait à l'aide de celle des graphes, on parle alors de noyaux du graphe, de jeux directs et de jeux inverses, de nombres et de fonctions de Grundy, mais mon propos n'est pas là. Tous ces jeux admettent des variantes qui permettent de les compliquer à loisir. Nous n'en étudierons que quelques cas parmi les plus simples.

1 Jeux d'allumettes ou de Nim à un tas

Jeu standard : Deux joueurs et un tas de 20 allumettes (ou pions, ou cartes, ou même des bouts de papier). Chaque coup se joue en retirant 1, 2, ou 3 allumettes (ni plus, ni moins). Un joueur commence et ils jouent l'un après l'autre. Le nombre d'allumettes du tas va donc en diminuant tout au long de la partie, c'est celui qui prend la dernière allumette qui a perdu.

Recette :

- Grouper les élèves par deux.
- Leur faire découper vingt morceaux de papier.
- Expliquer les règles du jeu.
- Les faire jouer.

On fait plusieurs parties, chacun des deux joueurs commençant à tour de rôle.

Celui qui connaît la stratégie peut gagner pratiquement à coup sûr contre un adversaire qui ne la connaît pas. On devine qu'un des deux joueurs est avantage (celui qui commence ou l'autre).

Voilà le truc : Un joueur peut contrôler d'une certaine façon le nombre d'allumettes dont diminue le paquet après que son adversaire et lui aient joué (dans cet ordre). Il peut s'arranger pour qu'après ces 2 coups le tas ait diminué de 4 allumettes exactement ($4 = 3 + 1$):

Quand l'adversaire prend une allumette il en prendra trois.

Quand l'adversaire prend deux allumettes il en prendra deux.

Quand l'adversaire prend trois allumettes il en prendra une.

Il faut toujours laisser une allumette à l'adversaire en fin de jeu, ce qui fait que les positions gagnantes à laisser à cet adversaire sont en remontant depuis la fin de la partie: 1, 5, 9, 13, 17 (et 21). Soit les nombres de la forme: $(4K + 1)$.

Si vous laissez à votre adversaire un nombre de la forme $(4K + 1)$ vous êtes sûr de gagner si vous jouez en appliquant la règle des 4 précédentes.

Donc dans le cas d'un tas de 20 allumettes (20 n'étant pas de la forme $4K + 1$) celui qui commence prend trois allumettes et en laisse 17 ($4 \times 4 + 1$), il est sûr de gagner à condition d'appliquer la stratégie. C'est-à-dire, de veiller à ce que le tas d'allumettes diminue de 4 allumettes tous les deux coups. Tandis que celui qui joue en second est à la merci d'un adversaire qui connaît la stratégie. Si c'est l'adversaire qui commence et qu'il ne connaisse pas la stratégie, on attend, en jouant au hasard, qu'il se trompe pour pouvoir lui rendre un jeu qui nous avantage, c'est-à-dire un multiple de 4 plus 1. *Celui qui joue en premier est donc avantage.*

Si l'on joue avec un tas de 21 allumettes c'est celui qui joue *en second* qui est avantage ($21 = 5 \times 4 + 1$).

Variantes du jeu :

- Faire varier le nombre d'allumettes du tas de départ.

– Dire que c’est celui qui prend la dernière allumette qui a gagné. Dans ce cas les positions à laisser à l’adversaire sont : 0, 4, 8, 12, 16 ... C’est-à-dire les multiples de 4.

– Dire que c’est celui qui laisse deux allumettes à son adversaire qui gagne. Dans ce cas les positions à laisser seront : 2, 6, 10, 14 ... C’est-à-dire les multiples de 4 plus 2.

– Jouer en prenant 1, 2, 3, 4 ou 5 allumettes. Dans ce cas les positions à laisser seront : 1, 7, 13, 19 ... C’est-à-dire les nombres de la forme $(1 + 6K)$ avec $(6 = 5 + 1)$.

– Jouer à l’envers : Partir de 5 allumettes et en ajouter 1, 2, 3, ou 4 à chaque coup, c’est le premier arrivé à 35 par exemple qui gagne. Dans ce cas le principe du secret est le même, les positions à laisser à l’adversaire sont de la forme : $(36 - 5K)$ avec $(5 = 4 + 1)$.

– Une variante plus compliquée, dont je ne donnerais pas le truc est la suivante : on peut prendre un nombre d’allumettes compris entre deux nombres donnés. Ce jeu s’étudie avec la théorie générale des graphes.

Avec l’outil informatique vous pouvez faire chercher un programme pour jouer contre la machine. Il faudra indiquer à l’ordinateur au début de la partie :

- Le nombre d’allumettes de départ soit D.
- Le nombre d’allumettes d’arrivée soit A.
- Le nombre maximum d’allumettes que l’on peut prendre ou ajouter à chaque coup, soit N (un coup consistera à prendre ou ajouter entre 1 et N allumettes). On prendra si $A < D$ et on ajoutera si $A > D$.
- Celui qui commence : la machine ou le joueur.

La machine appliquant la stratégie gagnante dès qu’elle tombe sur un jeu qui l’avantage et jouant au hasard dans le cas contraire. C’est un bon exercice d’arithmétique et de programmation. Mais il demande du temps.

2 Jeux d’allumettes ou de Nim à plusieurs tas :

Jeu standard : Faire 4 tas d’allumettes comprenant respectivement 1,3, 5 et 7 allumettes. Les joueurs jouent l’un après l’autre. Un coup consiste à prendre autant d’allumettes que l’on veut mais dans un seul tas. C’est celui qui prend la dernière allumette qui a perdu.

Donc le jeu de départ se présente de la façon suivante :

```

|
| | | | | |
| | | |
| | | | |
| | | | | |

```

Le truc est beaucoup plus compliqué et les élèves ne le découvriront certainement pas. Mais vous pouvez les faire jouer entre eux puis les faire jouer contre vous, ils perdront toujours. Cela attisera leur curiosité. Ensuite vous pouvez essayer de leur expliquer le truc. Il fait intervenir la numération binaire. De toute façon on peut jouer d’une façon intéressante sans le connaître en calculant ses coups comme dans une partie d’échecs. On devine qu’un des deux joueurs, celui qui commence ou celui qui joue en second est avantagé et que certains jeux sont gagnants tandis que d’autres sont perdants. L’explication du truc conduit à faire compter les élèves en base 2, ce qui est très formateur : 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, ...

Voilà ce truc :

On écrit les nombres d’allumettes de chacun des tas dans le système binaire. Et comme pour les tas d’allumettes, on dispose ces nombres les uns en dessous des autres en alignant les unités, les dizaines, les centaines, comme pour une addition. Voici deux exemples :

	1			1
	11			1
	101			11
	111			100

Nous appellerons « jeu pair » un jeu pour lequel l'écriture binaire donne un nombre pair de 1 dans chaque colonne. Et nous appellerons « jeu impair » un jeu pour lequel l'écriture binaire donne un nombre impair de 1 dans au moins une colonne.

Voici deux exemples de jeux pairs :

	1			10
	11			11
	100			1
	110			

Voici deux exemples de jeux impairs :

	1			11
	10			11
	100			111
	110			

On s'aperçoit facilement que si l'on donne un jeu pair à son adversaire il ne pourra nous rendre qu'un jeu impair. En effet, l'adversaire doit modifier un nombre dans un seul tas. De ce fait il sera obligé de changer au moins un 0 en 1 ou un 1 en 0 dans une des colonnes, et par conséquent le jeu qui était pair deviendra impair.

Voici deux exemples de jeux qui deviennent impairs :

	1			10
	11			11
	100			1
	110			
	1			10
	1			1
	100			1
	110			
On a enlevé deux allumettes dans le deuxième tas			On a aussi enlevé deux allumettes dans le deuxième tas	

On s'aperçoit également que quand l'adversaire nous rend un jeu impair on peut toujours lui rendre soit un jeu pair avec plusieurs tas de plus d'une allumette soit un jeu impair avec tous les tas ne comprenant qu'une seule allumette (ce qui nous met dans la position de gagner à coup sûr).

En effet, 3 cas sont à envisager :

a) Supposons d'abord que le jeu impair que nous donne l'adversaire comprenne plusieurs tas de plus d'une allumette.

Pour choisir le tas à modifier, considérons la colonne la plus à gauche de parité impair et choisissons de modifier sa parité en changeant un 1 en 0 dans un tas où il y a un 1 à cette position. Dans ce tas les 1 ou les 0 venant avant cette position restent inchangés et ceux qui viennent après cette position sont modifiés éventuellement de façon à rendre toutes les colonnes suivantes paires.

Nous voyons que cette modification correspond toujours à une diminution du nombre d'allumettes du tas dans lequel on a décidé de jouer (puisque le chiffre le plus à gauche modifiée est un 1 changé en 0).

Cette méthode est donc toujours applicable et il suffit pour jouer le coup d'enlever le nombre d'allumettes correspondant dans le tas choisis.

Notons que la façon de jouer n'est pas unique. Voici deux exemples :

	1		1
	10		10
	100		11
	110		11
	10		1
	100		1
	110		11
			11
On a enlevé l'unique allumette du premier tas.		On a enlevé une allumette au deuxième tas, mais on pouvait aussi enlever tout le troisième.	

b) Supposons maintenant que le jeu impair de l'adversaire ne comprenne qu'un seul tas avec plusieurs allumettes. Alors, en prenant toutes les allumettes de ce tas ou en en laissant qu'une on peut toujours laisser à l'adversaire un jeu impair ne comprenant que des tas à une allumette. Il est facile de voir qu'un tel jeu le laisse perdant à coup sûr. Voici deux exemples :

	1		1
	11		1
	1		100
	1		
	1		1
	1		1
	1		1
On a enlevé tout le deuxième tas.		On a laissé qu'une allumette au troisième tas.	

b) Le cas où l'adversaire nous laisse lui un jeu impair avec des tas d'une seule allumette est impossible si l'on a appliqué la stratégie assez tôt à partir d'un jeu impair comprenant plusieurs tas de plusieurs allumettes. S'il se présente c'est que notre adversaire connaît la stratégie ou a beaucoup de chance et qu'il n'a pas commencé la partie. Dans ce cas on a perdu.

On peut jouer contre les élèves en appliquant le truc au tableau sans leur expliquer, cela renforce leur curiosité car ils perdent toujours.

Le jeu standard avantage le deuxième joueur car il est pair. Le premier joueur le transformant nécessairement en jeu impair et se trouvant à la merci d'un adversaire qui connaît la stratégie.

Si l'on joue en premier on rend à l'adversaire un jeu impair, mais s'il ne connaît pas la stratégie il peut très bien nous restituer un jeu impair également car un jeu impair peut être transformé en pair ou impair. A ce moment on reprend l'avantage. Dans le cas où l'on commence en premier on peut jouer au hasard en espérant que l'adversaire nous donne à un moment du jeu une configuration impaire à partir de laquelle on pourra appliquer notre stratégie.

Quelques variantes de ce jeu :

– Jouer avec la règle : celui qui prend la dernière allumette a gagné. La stratégie est exactement la même, mais à la fin, au lieu de laisser un jeu impair avec des tas d'une allumette, on laisse un jeu pair avec des tas d'une seule allumette. On est alors sûr de prendre la dernière allumette. Ce jeu avantage également le deuxième joueur.

– Jouer avec une des deux règles précédentes mais en modifiant le nombre de tas et le nombre d'allumettes dans chaque tas. Les règles de parités restent les mêmes et la stratégie s'énonce de la même façon. Ce n'est pas obligatoirement le second joueur qui est avantagé.

– Un perfectionnement dont je n'indiquerai pas la stratégie consiste à considérer que dans chaque tas, les allumettes sont dans des cases situées les unes à côté des autres et que quand on prend une ou

plusieurs allumettes il faut les prendre dans des cases contiguës, le tas étant alors éventuellement divisé en deux. Avec cette règle le nombre de tas peut aller en augmentant à certains moments de la partie. Ce jeu s'étudie aussi avec la théorie des graphes.

Vous pouvez ici aussi avec l'aide de l'outil informatique chercher à faire un programme pour jouer contre la machine. Dans ce cas il faudra donner à la machine :

- Le nombre de tas et le nombre d'allumettes dans chacun d'eux.
- Si c'est celui qui prend la dernière allumette qui perd (ou qui gagne).
- Si c'est la machine ou le joueur qui commence.

La machine appliquera la stratégie gagnante chaque fois qu'elle rencontrera une configuration impaire et jouera au hasard dans le cas contraire.

Ce programme est assez compliqué à faire et on peut utiliser les instructions logiques AND, OR, XOR...etc. pour le mettre en œuvre.

Voilà, j'ai fini.

N.B : Si vous voulez en savoir plus, vous pouvez acheter le petit ouvrage : « LES JEUX DE NIM », de **Jacques Bouteloup** professeur honoraire de mathématiques spéciales qui est vendu par notre association lors de ses rassemblements ou par correspondance.

De nombreuses encyclopédies parlent des jeux de Nim. Vous pourrez y trouver aussi quelques explications.

Complément d'information sur le stage « Travaux croisés » organisé par l'IUFM

L'équipe des formateurs en formation continue mathématique de l'IUFM

Dans le bulletin « Aix-Marseille Vert » n° 4 du 1^{er} trimestre 2001, se trouve un article intitulé « Les parcours diversifiés et les travaux croisés au collège » qui rend compte d'un atelier réalisé par l'APMEP le 25 octobre 2000. On peut y lire la phrase suivante, page 21 : « *Enfin le souhait d'un stage de formation a été évoqué par un collègue (qui regrettait ne pas avoir eu encore de réponse à sa demande), la formation des enseignants et une meilleure information apporteront une aide utile qui doit aussi être envisagée* ».

Nous tenons à préciser :

– que les réponses aux demandes de formation ont été transmises par l'IUFM au Rectorat, fin décembre 2000, après que ce dernier ait clos la campagne de demandes de stages 2000-2001 le 21/12/2000 (voir le BA spécial n° 62 du 15/05/2000 qui définit les modalités d'organisation de cette campagne) ;

– qu'à la date du 25 octobre, seuls 7 collègues, sur l'ensemble de l'Académie, avaient sollicité l'IUFM pour participer au stage que celui-ci propose sur les travaux croisés : nombre trop faible pour qu'un stage puisse être organisé ;

– qu'en bonne logique, et compte tenu des moyens dont dispose la formation continue, sont satisfaites en priorité les demandes les plus nombreuses et urgentes, soit concrètement : celles concernant l'outil informatique pour l'enseignement des mathématiques (environ 250 demandes), la statistique au lycée et au collège (environ 200), les TPE en S (environ 200), auxquelles il faut rajouter les demandes concernant les stages « élèves en difficulté », « liaison 3^e-2^e », « outils didactiques », etc. ;

– que la nécessité de réunir un nombre suffisant de demandes pour qu'un stage puisse être organisé avait été signalée par l'un d'entre nous – oralement il est vrai – à l'une des 7 personnes candidates pour le stage « travaux croisés » ;

– que 3 personnes supplémentaires l'ayant demandé à la date du 21/12, ce stage pourra être enfin organisé pour les 10 demandeurs, durant le 3^e trimestre.

Nous considérons, tout comme l'APMEP, que la formation initiale et continue des professeurs de mathématiques n'est pas un simple « supplément d'âme » à l'exercice du métier. Aussi, alors que les moyens qui lui sont dévolus sont comptés, que des pressions récurrentes s'exercent pour les remettre en cause, nous trouverions pour le moins paradoxal que certaines maladroites publiées dans l'organe régional de l'APMEP puissent être considérées comme des armes par ceux qui voudraient la dénigrer.

L'agenda du prof de maths

La journée de La Régionale Aix-Marseille

Retenez votre journée du Samedi 19 Mai 2001.

Nous vous renvoyons à notre article sur la présente brochure.

Compétitions mathématiques

- Finale du Rallye Maths Sans Frontière : Mercredi 9 Mai 2001
- Olympiades régionales de mathématiques : Mercredi 9 Mai 2001

Centre de Culture Scientifique Technique et Industrielle (CCSTI)

55, rue Sylvabelle, 13006, MARSEILLE - Métro : Préfecture - Tel : 04 91 59 88 00 - web : <http://www.agora-sciences.org>

Ouvert à tous du mardi au samedi de 14h à 18h. Groupes reçus toute la journée sur rendez-vous ; accueil des scolaires. Tarifs : 15 Fr et 10 Fr ; gratuité pour les adhérents. Accès libre au centre de documentation, au rencontres et informations-débats.

Exposition « Electrostatique » : du 4 avril au 7 juillet 2001 au CCSTI Provence-Méditerranée. Tout public, à partir de 7 ans

Frisson scientifique ! Démonstrations spectaculaires et amusantes pour découvrir les principes fondamentaux de l'électrostatique, à l'aide d'un générateur de 80 000 volts. Une vingtaine d'expériences présentées par un animateur et impliquant le public : grêle électrostatique, cage de Faraday, paratonnerre, électrisation du corps humain (à vous faire dresser les cheveux sur la tête!) ...

Les informations-débats à l'Espace Ecureuil

26, rue Montgrand - Marseille 6^e.

Un cycle annuel de conférences grand public. Entrée libre, les mardis à 18h30.
En partenariat avec la Caisse d'Épargne Provence-Alpes-Corse.

- 10 avril 2001 : Jean-Michel CLAVERIE (Directeur de recherche au CNRS).
La bio-informatique, apprendre à lire les gènes.
- 22 mai 2001 : Francine CASSE (Professeur à l'université Montpellier II).
Le point sur ... les plantes transgéniques

Le séminaire de l'EHESS à la Vieille Charité à Marseille

Ce séminaire a pour but de présenter les travaux d'histoire et d'épistémologie des mathématiques, portant principalement sur la période moderne et contemporaine.

Il est dirigé par Eric BRIAN, directeur d'étude à l'EHESS, et Alain MICHEL, professeur à l'Université de Provence.

- Mercredi 21 mars : Jacqueline Boniface (Université de Toulouse) « La formalisation hilbertienne des mathématiques »
- Mercredi 16 mai 2001 : Christian Gérini (IUT de Toulon) « Le calcul différentiel dans les Annales de Gergonne »

Des journées sur le thème « diffusion du savoir mathématique » seront organisées vers le milieu du mois d'octobre. la date précise et le programme feront l'objet d'une diffusion ultérieure.

Renseignements : EHESS, Centre de la Vieille Charité, 13002 Marseille
Tel : 04 91 14 07 27

MATHS EN STOCK

Pierre EYSSERIC

Maths en Stock est une association loi 1901 qui travaille en partenariat avec les IREM et les IUFM, essentiellement dans les académies d'Aix-Marseille et de Nice, pour permettre la mise en place dans les classes de l'école primaire d'activités de recherche en mathématiques, faire découvrir aux enfants le plaisir de chercher et former les enseignants à ce type d'activité.

Les Ateliers de Recherche en Mathématiques (A.R.M.) sont expérimentés depuis 8 ans dans quelques classes des écoles primaires du Var, essentiellement au cycle 3 mais aussi dans quelques classes du cycle 2 ; depuis deux ans nous essayons d'étendre l'expérience aux classes volontaires des six départements de la région P.A.C.A. en intégrant chaque fois que cela est possible des classes d'écoles situées en ZEP ou en REP.

Présentation du dispositif

Il s'agit de transposer dans les classes de l'école primaire un style de travail, celui des chercheurs en mathématiques. L'image de cercles concentriques centrés sur l'enfant (ou sur le chercheur) permet une description assez simple de cette transposition.

Le **premier cercle** est constitué par l'enfant et son sujet de recherche, c'est à dire une question qu'il se pose, qui rentre dans le champ des mathématiques et à laquelle il a envie de pouvoir répondre ; le sujet peut être proposé par l'enfant ou par un tiers (l'enseignant par exemple) mais dans tous les cas l'élève doit se l'être approprié et se sentir responsable de la recherche d'une solution au problème posé.

Le **deuxième cercle** comprend deux ou trois élèves : ceux qui ont le même sujet de recherche ou des copains avec lesquels on parle librement de son travail ; son équivalent dans la communauté scientifique, ce sont les collègues du laboratoire, ceux que l'on accroche au détour d'un couloir ou devant la machine à café pour leur faire part d'une idée, d'une question, d'un obstacle rencontré, d'un article intéressant ... Ce cercle, bien que très informel, n'est pas sans importance ; c'est un espace de liberté : on peut travailler seul mais on a aussi le droit d'échanger avec d'autres, de parler sans contraintes de son travail ; cela a une incidence non négligeable sur l'implication des enfants dans l'activité de recherche et la découverte du plaisir de chercher.

Le **troisième cercle**, c'est la classe (les élèves et leur enseignant) qui fonctionne ici un peu comme un laboratoire avec son directeur de recherche. Après un temps de recherche plus au moins long les enfants vont devoir présenter leur travail à toute la classe ; on peut arriver avec des solutions à proposer mais aussi avec des questions restées sans réponse, sur lesquelles on ne parvient plus à avancer. Dans ce cas on explique ce que l'on a essayé, les impasses dans lesquelles on s'est retrouvé et chacun peut intervenir pour proposer de nouvelles pistes ou pour critiquer ce qui a été fait. A l'issue de ce débat deux situations peuvent se présenter : soit on estime que les idées échangées permettent de se remettre au travail sur ce sujet, soit on aboutit à un constat collectif d'impasse et on décide de se documenter ou de renvoyer la question au quatrième cercle (un référent mathématique extérieur à la classe qui peut être un chercheur ou un professeur de mathématiques). Lorsque par contre, l'enfant estime avoir résolu le problème qu'il s'était posé, ses solutions sont soumises à la critique sans pitié des autres élèves et de l'enseignant si cela est nécessaire ; il s'agit donc de convaincre toute la classe de la valeur des réponses proposées. Si le travail présenté est accepté, validé par la classe, il va pouvoir sortir de celle-ci, être publié ; cette publication pourra prendre des formes diverses : affichage dans le couloir, article dans le journal de l'école, fax adressé à une autre classe pratiquant la recherche en mathématiques, courrier envoyé à un chercheur correspondant de la classe ... On entre alors dans le quatrième cercle, mais avant d'en arriver là plusieurs allers et retours entre le premier et le troisième cercle sont souvent nécessaires et il n'est pas rare qu'un enfant arrivé convaincu d'avoir une excellente réponse doive à l'issue d'une discussion parfois acharnée convenir qu'il doit se remettre à l'ouvrage. Dans ce troisième cercle le rôle de l'enseignant comme directeur de recherche est fondamental : c'est lui qui régule les échanges, qui gère les allers et retours entre recherche et communication jusqu'à la validation d'un résultat à publier ou au constat qu'on ne sait pas et au recours à une aide extérieure.

Le **quatrième cercle** est extérieur à la classe : à l'origine du projet, c'était un chercheur, un spécialiste des mathématiques auquel on peut envoyer les travaux de la classe (des résultats, mais aussi des questions restées sans réponse), quelqu'un d'extérieur à la classe, à l'école et qui peut être le garant de la qualité

mathématiques des travaux réalisés et ainsi autoriser leur publication. En fait, dans la pratique, les choses se sont souvent passées différemment, ce quatrième cercle se traduisant surtout par la publication, la communication hors la classe des travaux de recherche des enfants.

Enfin le **dernier cercle** est le congrès annuel des enfants chercheurs : tous les ans, les enfants qui ont fait au cours de l'année scolaire des travaux de recherche en mathématiques viennent les présenter au cours du **congrès Maths en Stock**. Lors des premiers congrès, les effectifs étant peu nombreux, la présentation prenait la forme de communications orales. Avec entre 300 et 450 participants aux derniers congrès Maths en Stock, nous avons privilégié la communication par voie d'affiche et l'organisation d'ateliers de recherche en mathématiques. Ce congrès est un peu l'aboutissement du travail de toute une année tout en étant aussi pour certains enfants un tremplin vers d'autres recherches à travers les sujets découverts au cours de la journée. C'est une sorte de fête des mathématiques et l'engouement des enfants surprend souvent les parents accompagnateurs. « *Ils sont fous ; c'est leur sortie de fin d'année, on leur fait faire des maths toute la journée, et en plus, ils sont contents !* », nous a dits l'un d'eux.

Siège social : IUFM – Centre de Draguignan
BP 143 – Avenue A. Gilet
83300 DRAGUIGNAN

Siège de l'antenne de l'Académie d'Aix-Marseille : Pierre Eysseric
Place Saint Exupéry
13320 BOUC BEL AIR
Courrier électronique : p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr

BULLETIN D'ADHÉSION

Année scolaire 2000/2001

Membre actif : cotisation annuelle de 10 F

Membre bienfaiteur : cotisation annuelle de 100 F

Adhésion d'une école : cotisation annuelle de 50 F

Adhésion d'une classe : cotisation annuelle de 10 F

Nom-École(*) :

Prénom-Classe(*) :

Profession :

ADRESSE :

.....

Téléphone :

Fax :

E-mail :

J'adhère à l'association Maths en Stock pour l'année scolaire 2000/2001 comme membre actif/bienfaiteur/école/classe(*).

Date et signature :

(*) Rayer la mention inutile.