

Le cube moyen

Catherine DUFOSSÉ

Une activité pour les élèves de seconde, ou comment marier le chapitre de statistiques avec un travail sur les fonctions.

On pourrait vouloir définir le « Français moyen ». Il aurait pour taille la taille moyenne, pour poids le poids moyen, pour salaire le salaire moyen, et ainsi de suite.

Nous allons juger du bien-fondé de cette entreprise en essayant de définir un « objet moyen » beaucoup plus simple : un « cube moyen ».

1°- Soit une série de 10 cubes. Choisissez vous-mêmes les arêtes de ces dix cubes, en complétant la deuxième ligne du tableau suivant :

Cube n° :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Arête :										
Volume :										

Calculez les volumes de ces cubes et reportez les dans la troisième ligne du tableau.

2°- Calculez alors :

$$\begin{cases} \text{a) la moyenne des arêtes : } A_m = ? \\ \text{b) la moyenne des volumes : } V_m = ? \end{cases}$$

3°- Que vous inspirent ces résultats? Peut-on parler sans plus de précision d'un « cube moyen » qui résumerait cette série de 10 cubes?

4°- Avançons un peu plus loin : peut on comparer la moyenne des volumes des cubes et le volume du cube ayant pour arête la moyenne des arêtes? Pour la série ci-dessus (première ligne) quel est le plus grand :

$$\begin{cases} \text{a) le cube de la moyenne des arêtes?} \\ \text{ou} \\ \text{b) la moyenne des cubes des arêtes?} \end{cases}$$

5°- Examinons les choses de façon plus générale mais pour deux cubes seulement : tracez sur papier quadrillé la représentation graphique de la fonction cube définie sur les réels positifs par $x \mapsto x^3$.

Placez deux valeurs a et b sur l'axe des abscisses, puis, sur le même axe, leur moyenne : $\frac{a+b}{2}$.

Placez alors sur l'axe des ordonnées :

- le cube de a ,
- le cube de b ,
- la moyenne de ces deux cubes,
- puis le cube de la moyenne de a et b .

quel est le plus grand : le cube de la moyenne ou la moyenne des cubes? Ce résultat vous semble-t-il dépendre des valeurs de a et de b ou est-il général?

6°- Parmi les fonctions que vous connaissez, et en utilisant le même type d'arguments graphiques, pouvez-vous citer deux fonctions autres que la fonction cube telles que, pour l'une, la moyenne des images de deux nombres soit plus grande que l'image de leur moyenne, alors que pour l'autre, la moyenne des images est plus petite que l'image de la moyenne?

7°- Reprenons les choses algébriquement. La moyenne des cubes moins le cube de la moyenne, c'est :

$$\frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a + b}{2}\right)^3 = ?$$

C'est un peu difficile à factoriser, alors, développez cette expression, puis comparez-la à l'expression suivante, après l'avoir, elle aussi, mise sous forme développée :

$$\frac{3}{8}(a + b)(a - b)^2$$

Alors, qui est le plus grand : la moyenne des cubes ou le cube de la moyenne ?

8°- Si vous avez encore du courage, vous pouvez examiner ce que donne un calcul algébrique analogue pour les deux fonctions que vous avez citées à la question 6.