Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle (suite)

Auteur : **F. PECAUT**

9 - Demi-axes de l'ellipse image du cercle C(O,R) dans la projection conique notée p(C,Q,S) (cf. AMV n°5, §7).

Pour la commodité du lecteur, la fig.9 est reproduite ci-dessous. Rappelons que les données sont : $\mathcal{C}(O, R)$ dans le plan (V) dit horizontal, $Q \in (V)$ extérieur à $\mathcal{C}(O, R)$ et $S \neq Q$ sur la verticale de Q, soit :
$\mathrm{OQ} = q > R$, $\mathrm{QS} = s$.
$B\overline{B}$ est la polaire de Q par rapport à $\mathcal{C}(O, R)$, P est le milieu de $B\overline{B}$, $\mathrm{OP} = p$, $\mathrm{pq} = R^2$.
CD est le diamètre de $\mathcal{C}(O, R)$ passant par Q.

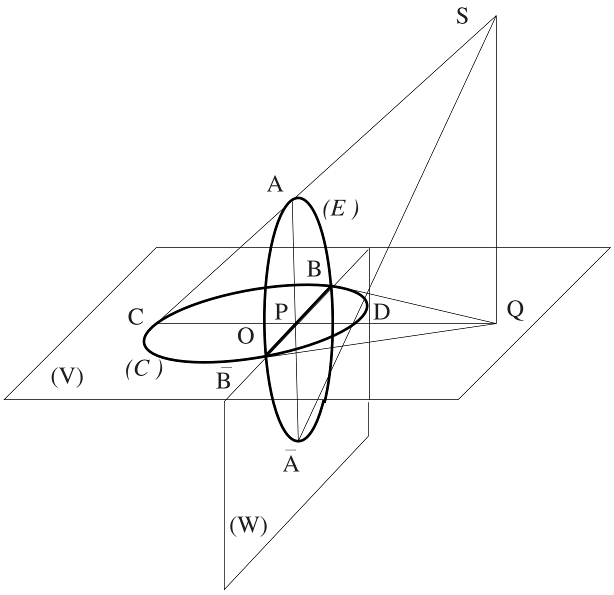

fig. 9 : projection conique de cercle C(O,R) sur l'ellipse E(a,b).

La projection conique de $\mathcal{C}(O, R)$ sur (W), plan vertical de $B\overline{B}$, est l'ellipse $\mathcal{E}(a, b)$, de centre P, dont les longueurs des demi-axes sont $\mathrm{PA} = P\overline{A} = a$, $\mathrm{PB} = P\overline{B} = b$.
Les triangles homothétiques CPA et CQS d'une part, $\mathrm{DP}\overline{A}$ et DQS d'autre part, permettent d'écrire :

$$\frac{a}{s} = \frac{p+R}{q+R} = \frac{R-p}{q-R} = \frac{R}{q} = \frac{p}{R} \qquad (1)$$

Les triangles rectangles QBP et QOB sont semblables :

$$\frac{b}{\mathrm{QB}} = \frac{R}{q} \qquad (2)$$

De (1) et (2), on tire $\frac{a}{b} = \frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{QB}}$, rapport de la cote de S à la distance tangentielle de Q à $\mathcal{C}(O, R)$.
On peut donc choisir Q et S pour obtenir n'importe quel rapport $\frac{a}{b}$ pour $\mathcal{E}$. En particulier :

Pour que $\mathcal{E}(a, b)$, image de $\mathcal{C}(O, R)$ dans $p(\mathcal{C}, Q, S)$, soit un cercle, il faut et il suffit que $QB = QS$, ou encore que QS soit vu de B sous un angle de 45°.

La question se pose de savoir si on peut trouver une même projection conique, fonctionnant comme ci-dessus, pour deux cercles à la fois ; la réponse est oui si les deux cercles sont intérieurs.

10 - Trouver un point qui ait même polaire par rapport à deux cercles.

Donnons nous, dans un plan (V), deux cercles distincts $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$. On peut supposer $R > \rho$. Sur l'axe de symétrie des deux cercles, cherchons deux points P et Q conjugués harmoniques par rapport aux deux cercles.
Définissons P et Q par leurs abscisses p et q, $p < q$, par rapport à l'origine O. La droite (OΩ) est orientée de manière que $\overline{O\Omega} = d > 0$. Alors :

$$pq = R^2 \ ; \ (p - d)(q - d) = \rho^2 \qquad (3)$$

Le système (3) est équivalent au système $pq = R^2,\ p + q = \frac{R^2 + d^2 - \rho^2}{d}$. Donc p et q sont racines de l'équation du second degré :

$$dx^2 - (R^2 + d^2 - \rho^2)\, x + R^2 d = 0 \qquad (4)$$

On vérifie que le discriminant est :

$$\Delta = (R + d + \rho)(R + d - \rho)(R - d + \rho)(R - d - \rho)$$

Il est strictement positif quand $d < R - \rho$ ou $d > R + \rho$, c'est à dire quand ($\mathcal{C}$) et (Γ) ne se coupent pas. Les deux racines sont alors positives. Mais pour que Q soit extérieur aux deux cercles, il faut que $(\Gamma) \subset (\mathcal{C})$. On en conclut que pour $d < R - \rho$, et dans ce cas seulement, les projections coniques $p(C, Q, S)$ et $p(\Gamma, Q, S)$ sont les mêmes. Enonçons :

Soient deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$ dans un plan (V), $(\Gamma) \subset (\mathcal{C})$.
Soit (P, Q) l'unique couple de points de la droite ($O\Omega$) conjugués harmoniques par rapport aux deux cercles, Q extérieur aux deux cercles. Alors la projection conique faite d'un point S arbitraire de la droite perpendiculaire à (V) en Q, sur le plan (W) perpendiculaire à ($O\Omega$) en P, envoie la paire de cercles $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ sur une paire d'ellipses de (W), $\mathcal{E}(a, b)$ et $\mathcal{E}(a', b')$ respectivement, centrées en P et de mêmes directions principales.

Dans la suite, des ellipses de même centre et de mêmes directions principales seront dites co-axiales.

11 - Relations métriques entre les paramètres R, ρ, d qui définissent la paire de cercles (C), (Γ), (Γ⊂C) d'une part, les longueurs des demi-axes des ellipses co-axiales obtenues par projection conique d'autre part.

A la relation (1) du §9, qui concerne la correspondance $\mathcal{C}(O, R)$, $\mathcal{E}(a, b)$, il faut ajouter (5), relative à $\Gamma(\Omega, \rho)$ et $\mathcal{E}(a', b')$. On déduit (5) de (1) en y remplaçant R par ρ, p par $p - d$, q par $q - d$. Il vient :

$$\frac{a}{s} = \frac{R}{q} = \frac{p}{R} \quad (1) \qquad ; \qquad \frac{a'}{s} = \frac{\rho}{q - d} = \frac{p - d}{\rho} \quad (5)$$

D'autre part b^2 est l'opposé de la puissance $\mathcal{P}(C, P)$ et b'^2 l'opposé de la puissance $\mathcal{P}(\Gamma, P)$. Rappelons que le rapport des puissances d'un point M d'un cercle C d'un faisceau linéaire de cercles par rapport à deux autres cercles du même faisceau est le rapport des distances algébriques du centre de C aux centres des deux autres cercles. Appliquons à $M = P$, et aux deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$, car P est un des deux cercles de rayon nul du faisceau défini par ($\mathcal{C}$) et (Γ). Il vient :

$$\frac{\mathcal{P}(\Gamma, P)}{\mathcal{P}(\mathcal{C}, P)} = \frac{\overline{P\Omega}}{\overline{PO}} = \frac{p - d}{p}$$

Avec $\mathcal{P}(\Gamma, P) = -b'^2$ et $\mathcal{P}(\mathcal{C}, P) = -b^2$, on obtient :

$$\frac{b'^2}{b^2} = \frac{p - d}{p} \qquad (6)$$

(1), (5) et (6) invitent à poser $\alpha = \frac{a'}{a}$, $\beta = \frac{b'}{b}$.
(1) et (5) entraînent $\alpha = \frac{R}{\rho}\ \frac{p-d}{p} = \frac{\rho}{R}\ \frac{q}{q-d}$ et (6) s'écrit $\frac{p-d}{p} = \beta^2$.
On en tire $\frac{R}{\rho}$, $\frac{p}{d}$, $\frac{q}{d}$ en fonction de α et β :

$$\frac{R}{\rho} = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad ; \quad \frac{p}{d} = \frac{1}{1-\beta^2} \quad ; \quad \frac{q}{d} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}$$

Le produit des deux dernières égalités, avec pq = R^2, donne :

$$d^2\ \alpha^2 = R^2\ (1-\beta^2)\ (\alpha^2-\beta^2)$$

De ces calculs on déduit finalement l'expression des paramètres $\frac{\rho}{R}$ et $\frac{d}{R}$, qui caractérisent la figure formée par la paire de cercles $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ à une similitude près, en fonction des rapports $\alpha = \frac{a'}{a}$ et $\beta = \frac{b'}{b}$ des longueurs des demi-axes des ellipses $\mathcal{E}(a, b)$, $\mathcal{E}(a', b')$, soit :

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\beta^2}{\alpha} \quad ; \quad \frac{d^2}{R^2} = \frac{(1-\beta^2)\ (\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2} \qquad (7)$$

A la relation $f_n(R, \rho, d) = 0$, homogène en R, ρ, d, qui caractérise l'interscription d'un polygone à n côtés dans la paire de cercles $(\mathcal{C}, \Gamma)$, $(\Gamma) \subset (\mathcal{C})$, correspond, par les formules (7), la relation permettant l'interscription d'un polygone à n côtés dans deux ellipses co-axiales $\mathcal{E}(a, b)$ et $\mathcal{E}(a', b')$, $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$.
C'est une relation algébrique liant $\alpha = \frac{a'}{a}$ et $\beta = \frac{b'}{b}$.

Pour réaliser une interscription dans deux ellipses co-axiales, on peut toujours choisir arbitrairement l'une des ellipses : on a encore la liberté de choisir α ou β, l'autre étant déterminé par la relation d'interscription. Dans les derniers paragraphes, nous traiterons des cas $n = 3$ et $n = 4$.

12 - Quadrilatères interscrits dans deux ellipses co-axiales.

a) La relation d'interscription d'un quadrilatère dans deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$, $d = O\Omega$, dans le cas $(\Gamma) \subset (\mathcal{C})$ (cf. A.M.V. n°4, conclusion du §5) est : $2\,\rho^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$, $d < R$. Transformons à l'aide des formules (7) :

$$2\ \beta^4\ [\alpha^2 + (1-\beta^2)\ (\alpha^2-\beta^2)] = [\alpha^2 - (1-\beta^2)\ (\alpha^2-\beta^2)]^2$$
$$2\ [2\ \alpha^2 - \beta^2\ (\alpha^2+1) + \beta^4] = (1+\alpha^2-\beta^2)^2$$

$$\beta^4 = (\alpha^2-1)^2 \Longleftrightarrow \{\beta^2 = \alpha^2 - 1 \text{ ou } \beta^2 = 1-\alpha^2\} \qquad (8)$$

Dans le cas $(\Gamma) \subset (C)$, α et β sont inférieurs à 1 car $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$.

Pour qu'on puisse interscrire un quadrilatère dans deux ellipses co-axiales, $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$, il faut et il suffit que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, soit $a'^2\ b^2 + a^2\ b'^2 = a^2\ b^2$.

Quand cette condition est remplie, les quadrilatères interscrits sont tous des parallélogrammes.
Cette dernière affirmation se déduit de la remarque faite à la fin du §8 (cf. A.M.V. n°5) : les diagonales d'un quadrilatère interscrit dans deux cercles intérieurs passent par le point limite intérieur du faisceau défini par les deux cercles. Dans la projection conique, ce point limite devient le centre commun des ellipses, et les quadrilatères interscrits sont des parallèlogrammes parceque les diagonales se coupent en leur milieu.

b) Cas particuliers d'interscription de quadrilatères dans deux ellipses co-axiales $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$.

◊ **L'une des ellipses est un cercle :**
Si c'est la "grande", $a = b = r$, la condition d'interscription est : $a'^2 + b'^2 = r^2$, c'est le cas d'une ellipse et de son cercle orthoptique, les quadrilatères interscrits sont tous des **rectangles** (cf. A.M.V. n°5, §6).
Si c'est la "petite", $a' = b' = r$, la condition d'interscription est : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$. Les quadrilatères interscrits

sont tous des **losanges**, parceque les deux segments de tangentes issues d'un point à un cercle sont égaux (voir figure 10).

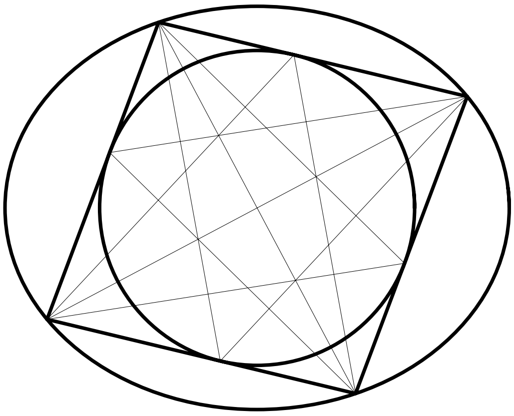

fig.10 : ellipse et cercle; les quadrilatères interscrits sont tous des losanges.

Le cas où l'une des ellipses est un cercle donne une méthode d'interscription dans deux ellipses concentriques qui ne sont plus co-axiales : on transforme l'une des ellipses en cercle par affinité (projection cylindrique). La transformée de l'autre dans la même affinité est une ellipse, qui a toujours le même centre. Puisqu'on sait interscrire dans les figures transformées, on sait interscrire dans les figures initiales.

◊ **Les deux ellipses sont homofocales** (voir figure 11) **:**

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 \iff a^2\ (1 - \alpha^2) = b^2\ (1 - \beta^2)$$

Pour des ellipses homofocales, la condition $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ implique aβ = bα, c'est à dire $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'}{b'}$. Le lecteur pourra vérifier que $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'}{b'}$ est une condition suffisante pour l'interscription de quadrilatères dans deux ellipses homofocales, pourvu que ce ne soit pas deux cercles concentriques ($\alpha \neq \beta$).
Dans la pratique, on peut se donner $\mathcal{E}(a', b')$, de foyers *F* et *F'*, de centre *O*. On construit le point *B* sur la médiatrice de [FF'] tel que le rapport $\frac{a}{b}$ de ses distances à *F* et à *O* soit $\sqrt{\frac{a'}{b'}}$. Ayant *B*, on obtient *A* sur la droite FF' par OA = BF.

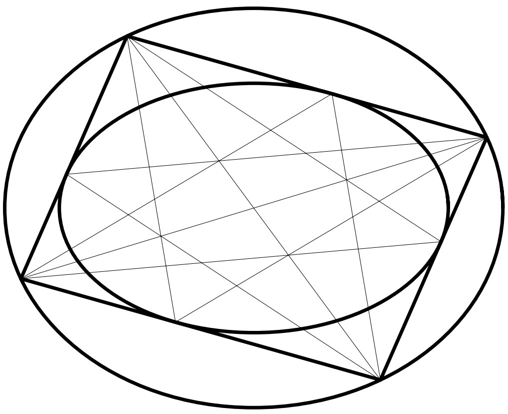

fig.11 : ellipses homofocales; les parallélogrammes interscrits ont même périmètre (billard-4)

◊ L'interscription de quadrilatères dans deux ellipses homofocales jouit d'une propriété remarquable, vraie pour des polygones d'un nombre quelconque de côtés, qui sera démontrée au début du cinquième et dernier épisode, à savoir que tous les polygones interscrits ont même périmètre (figure 11).

Fin du quatrième épisode et suite (et fin) au prochain numéro.