Suites géométriques et quadratures

André BONNET, Université de Provence

1 La notion de quadrature :

Dans le langage courant, le mot quadrature est souvent synonyme d'impossibilité, par allusion au vieux problème de la quadrature du cercle. En mathématiques, il est employé à la fois pour la réalisation, à la règle et au compas, d'un carré ayant même aire qu'une figure donnée, mais aussi pour désigner une intégrale ou une primitive. Cette dernière utilisation du mot est courante chez les mécaniciens qui concluent parfois leur étude par l'expression « ... le problème est alors ramené à des quadratures ».

Posé depuis l'antiquité, le problème de la quadrature du cercle a occupé, jusqu'au XIXème siècle, des générations de mathématiciens. Rappelons que l'impossibilité de résoudre, « à la règle et au compas », ce problème est la conséquence de la transcendance deπ (démontrée en *1882* par *Lindeman*) et du fait que les nombres constructibles (rapports de grandeurs constructibles) sont dans des extensions algébriques de degré 2^n de $\boldsymbol{Q}$.

Au dix-septième siècle, le mot quadrature est parfois simplement employé pour un résultat ou une propriété sur l'aire de la figure étudiée.

La figure la plus simple à réaliser, avec un compas, étant le cercle, il était normal d'aborder, en premier, le problème de la quadrature du cercle. D'autres figures simples, comme les coniques, peuvent aussi être envisagées.

Pour une ellipse, le problème de la quadrature est tout aussi impossible que pour le cercle. En effet, une ellipse dont les demi-axes sont a et b, s'obtient à partir d'un cercle de rayon a (ou b) par une affinité de rapport $\frac{b}{a}$ (ou $\frac{a}{b}$). L'aire de l'ellipse étant égale à πab, il est tout aussi impossible que pour le cercle, de construire, à la règle et au compas, un carré de même aire que l'ellipse, à partir des grandeurs a et b.

Le cas de l'hyperbole a fait l'objet d'un article dans ce bulletin (voir [1] *AixMarseilleVert n° 1, page 3*). Rappelons le résultat donné (en *1647*) par *Grégoire de Saint Vincent*. Pour une hyperbole d'équation algébrique $x\,y = 1$, si on note $\mathcal{L}(x)$ l'aire sous l'hyperbole limitée par l'axe Ox et les droites verticales passant par les points (1,0) et (x,0) de l'axe Ox, on a, pour deux réels positifs a et b, la relation :

$$\mathcal{L}(ab) = \mathcal{L}(a) + \mathcal{L}L(b).$$

Le travail de *Grégoire de Saint Vincent* est à rapprocher de celui de *Pierre Fermat*. Dans [2] page 182 on trouve la phrase suivante : *Pierre Fermat ...* en *1636 ...* fait connaitre, dans un écrit intitulé « *Sur la transformation et la simplification des lieux ...* », sa méthode *uniforme et constante* qui lui permet de *carrer au moyen d'une progression géométrique* toutes les paraboles et hyperboles (à l'exception d'une seule).

Il faut signaler que, pour *Fermat,* le terme de parabole (resp. hyperbole) désigne une courbe d'équation $y = a\,x^m$ où m est un entier naturel (resp. un entier négatif). Il n'est peut être pas inutile de rappeler aussi, que gr,ce à *Descartes* (1596-1650) la notion de courbe passe, à cette époque, d'un statut purement géométrique à celui de courbe algébrique. Toutefois il semble que la notion d'abscisse ait été pour la première fois utilisée par *Grégoire de Saint Vincent* dans son travail sur l'hyperbole cité plus haut.

2 Quadratures, calcul infinitésimal, calcul intégral et calcul différentiel :

La première définition précise de l'intégrale date selon [2] de 1823 et est attribuée à Cauchy. Celui-ci, en reprenant les idées de Leibniz (qui « interprétait les aires comme des sommes de rectangles »), démontre que, pour une fonction f réelle, continue sur l'intervalle $[x_0, X]$ et pour une subdivision de cet intervalle en n sous intervalles par les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = X$, la somme :

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

tend vers une limite, lorsque la longueur du plus grand sous intervalle tend vers zéro et que cette limite ne dépend que de f et des valeurs extrêmes de x_0 et X.

Ce n'est qu'en *1854* que *Riemann* developpera, dans sa thèse d'habilitation, une théorie de l'intégration plus générale que celle de *Cauchy.*

Par contre, depuis le début du *XVII^e* siècle les méthodes infinitésimales prolifèrent et conduisent *Newton* et *Leibniz* à s'intéresser de près au calcul infinitésimal. Dès *1669*, le lien entre quadratures et dérivées est établi clairement par *Newton.* Toutefois il faudra attendre « *Quadratura curvarum* » écrit en 1676 et publié en 1704, pour que *Newton* formule ce qui correspond à peu près à notre définition actuelle de la dérivée.

3 La quadrature de la parabole :

Nous présenterons tout d'abord le point de vue d'*Archimède.* Celui-ci prouve que l'aire sous la parabole, on dit aussi aire d'un segment parabolique, est égale à quatre fois le tiers de l'aire du triangle de même base inscrit dans la parabole (*cf. fig. 1 ci-dessous, triangle bleu*) et dont le troisième sommet est sur le diamètre conjugué de la base. Nous présenterons ensuite le point de vue de *Fermat* qui utilise, comme *Grégoire de Saint Vincent,* une méthode « d'exhaustion » dont la définition sera donnée ultérieurement.

On peut rappeler que *Grégoire de Saint Vincent* utilise abondamment, dans son étude de l'hyperbole, des « progressions » géométriques.

Méthode d'Archimède (287-212 av. JC) :

Une étude complète du travail d'*Archimède* est donnée dans [2] page 172-173. Toutefois la figure de la page 172 est un cas particulier (base du triangle perpendiculaire à l'axe de la parabole) alors que la démonstration est valable pour le cas général. On pourra, pour la lecture de ces deux pages, remplacer cette figure par la figure suivante :

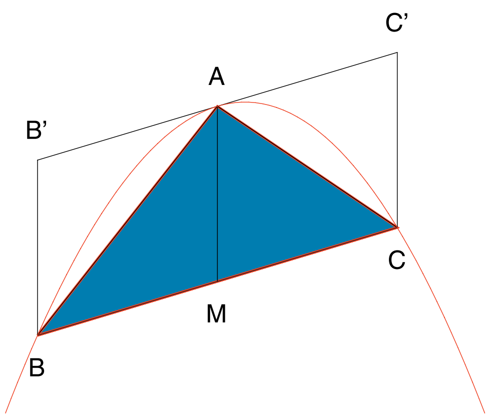

fig. 1

Le principe de la démonstration d'*Archimède* est :

1. de remplir l'espace entre le triangle ABC et la parabole par des triangles obtenus par dichotomie,
2. de parvenir, par des considérations géométriques simples à l'évaluation de l'aire de ces triangles,
3. d'établir la conjecture : « aire sous la parabole $=\frac{4}{3}$ aire du triangle ABC »,
4. de faire la démonstration de cette conjecture par un double raisonnement par l'absurde.

Dans la figure 1, qui correspond à la première étape, M est le milieu de BC et AM est le diamètre conjugué de BC.

La deuxième étape consiste à introduire deux nouveaux triangles, ayant pour bases respectives les cotés BA et AC et dont les sommets sont sur la parallèle à *BB'* passant par les milieux E de BM et F de MC (*Cf. fig 2*). On notera K, (respectivement L), les milieux de BA, resp. AC.

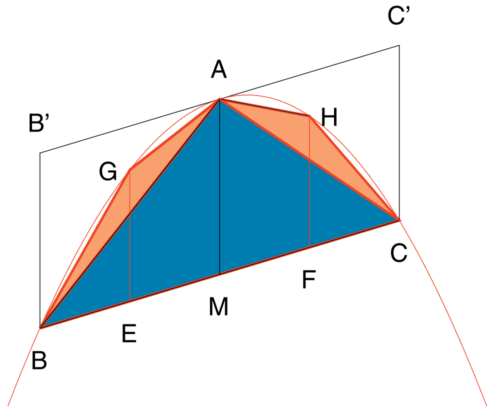

fig. 2

Pour la réalisation d'une figure, on peut difficilement aller au dela de la troisième étape (*Cf. fig 2 bis, ci-dessous*)

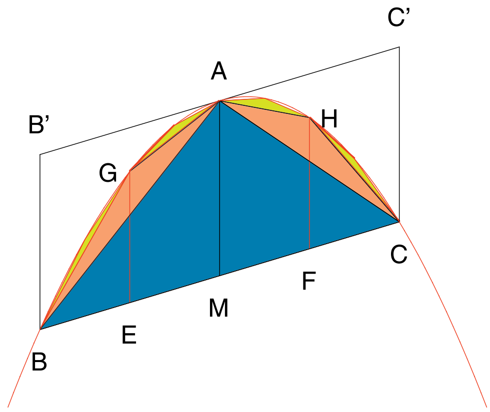

fig. 2 bis

Par des considérations géométriques simples, que l'on peut le mettre en évidence par une figure (*Cf. fig 3, ci-dessous*), on montre que l'aire des triangles BGA et AHC (en marron) sont égales à $\dfrac{1}{8}$ de l'aire du triangle ABC (en bleu) :

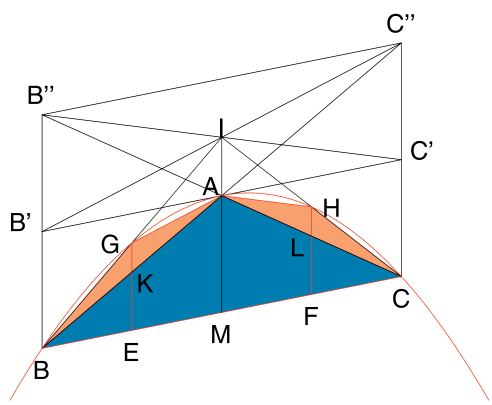

fig. 3

Par la suite on notera T l'aire du triangle ABC et par A l'aire du segment parabolique de base BC. A la deuxième étape, la somme des aires des trois triangles ABC, BGA, AHC est égale à : $T + 2\,\dfrac{1}{8}\,T = (1 + \dfrac{1}{4})T$.

On poursuit le remplissage de la parabole, en construisant quatre nouveaux triangles, inscrits dans la parabole, de bases *BG, GA, AH, HC* et dont le sommet est sur la parallèle à *BB'* passant par le milieu de la base. On obtient une somme des aires de ces sept triangles égale à $(1+ \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2)T$.

A l'étape n, on dispose de $2^n - 1$ triangles, dont la somme des aires est égale à $U_n = (1 + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{4^{(n-1)}})T$.

Pour conclure, il faudrait calculer la limite de la suite U_n ce qu'évite, bien entendu *Archimède* car ceci le conduirait à calculer une somme infinie.

Par contre, comme il dispose de l'identité : $(1 + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{4^{(n-1)}})T + \frac{1}{3}.\ \frac{1}{4^{(n-1)}}\ T = \frac{4}{3}T$, il conjecture que le résultat cherché doit être $\frac{4}{3}\ T$, ce qu'il démontre par le double raisonnement par l'absurde que l'on peut reconstituer ainsi :

1/ Supposons que l'aire A du « segment parabolique » soit supérieure à $\frac{4}{3}\ T$. On peut alors trouver une valeur de n telle que les $2^n - 1$ triangles construits sous la parabole (par la méthode précédente) aient une aire totale $U_n = (1 + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{4^{(n-1)}})T$ inférieure à A et supérieure à $\frac{4}{3}\ T$.
Or U_n est égal à $\frac{4T}{3}$ - $\frac{1}{3}.\ \frac{T}{4^{(n-1)}}$. L'hypothèse $A > \frac{4}{3}\ T$ est donc à rejeter.

2/ Supposons maintenant que l'aire A soit inférieure à $\frac{4}{3}\ T$ et notons D la différence $D = \frac{4}{3}\ T - A$.
D'après l'axiome d'*Archimède*, justement, il doit exister un entier n telle que4^n D $> T$.
On a alors : $D = \frac{4}{3}\ T - A > \frac{1}{4^n}\ T > \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}\ T = \frac{4}{3}\ T - (1 + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{4^{(n-1)}})\ T$, d'où l'on déduit :
$A < (1 + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{4^{(n-1)}})\ T = U_n$. Or en considérant les $2^n - 1$ triangles construits sous la parabole, dont l'aire totale est $U_n = (1 + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{4^{(n-1)}})T$ on met en évidence que U_n doit être inférieure à A.
L'hypothèse $A < \frac{4}{3}\ T$ est donc aussi à rejeter.

Conclusion : la seule valeur possible pour A est $\frac{4}{3}\ T$.

On peut remarquer qu'*Archimède* évite d'utiliser la notion, un peu confuse, de polygÙne à un nombre infini de cotés et que les aires approchées n'épuisent pas, « exhaustivement », l'aire recherchée. La méthode d'*Archimède* différe ainsi sensiblement des méthodes du XVIIème siècle, telles que celles utilisées par *Grégoire de Saint Vincent* ou par *Pierre Fermat*, que l'on désigne souvent, pour cette raison, de « méthodes d'exhaustion ».

Les quadratures de Fermat et de Pascal :

Pour une meilleure compréhension, nous décrirons la méthode utilisée par *Pierre Fermat* (*1601-1665*) pour « carrer les paraboles », en utilisant le symbolisme moderne de l'algèbre. Le travail de *Fermat* a été repris par *Blaise Pascal* (*1623-1662*) en utilisant des rectangles construits sur des abscisses en progression arithmétique, ce qui est un peu hors sujet eu égard au thème choisi, mais présente un réel intérêt pour les techniques de quadratures utilisées à cette époque. La démonstration de Pascal est fournie en annexe.

Il y a deux façons d'envisager la parabole comme une courbe algébrique. Suivant sa disposition par rapport aux axes, elle aura une équation de la forme $y = x^2$, ou $y^2 = x$. Dans les deux cas il est possible d'imaginer cette courbe comme un graphe d'une fonction. C'est ce que nous ferons avec la racine carrée, pour remplacer la deuxième équationpar $y = \sqrt{x}$. Dans les deux cas nous allons montrer, en utilisant des suites géométriques, que l'aire est une primitive de la fonction donnant y en fonction de x.

Pour calculer l'aire sous la parabole d'équation $y = \sqrt{x}$ (*fig.4*) ou $y = x^2$ (*fig. 5*) située entre O et x, *Fermat* choisit sur l'axe des points dont les abscisses sont : x, $q\ x$, $q^2\ x$, $q^3\ x$, ... où q est un nombre réel positif inférieur à 1, (*cf. fig. 4 ou 5*) :

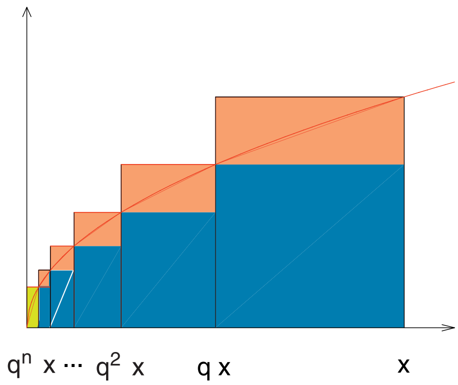

fig.4

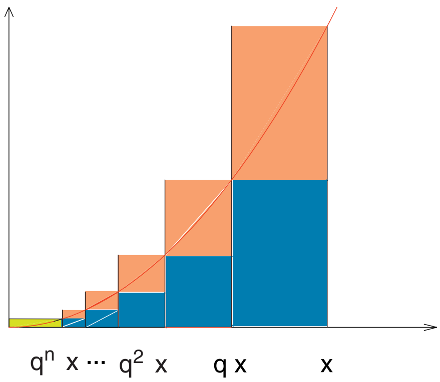

fig. 5

Cas de la parabole d'équation $\mathbf{y = \sqrt{x}}$:

Pour une valeur de x donnée, on notera $S_n$etT_n la somme des aires des rectangles situés respectivement sous la parabole et au-dessus d'elle et on notera A l'aire sous la parabole. On a alors l'encadrement suivant : $S_n < A$ et$A < T_n + q^n\,x\,\sqrt{q^n\,x}$.

Calculons S_n et T_n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (q^k\,x - q^{(k+1)}\,x)\,\sqrt{q^{(k+1)}\,x}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (q^k\,x - q^{(k+1)}\,x)\,\sqrt{q^k\,x}$ ce qui donne après mise en facteur des puissances de q : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^{\left(\frac{1}{2}+\frac{3\,k}{2}\right)}\,(1-q)\,x\,\sqrt{x}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^{\left(\frac{3\,k}{2}\right)}\,(1-q)\,x\,\sqrt{x}$ (on constate par le calcul que$S_n = \sqrt{q}\,T_n$, ce qui était prévisible géométriquement).

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison a et de premier

terme 1 étant égale à $\dfrac{1-a^n}{1-a}$, en prenant $a = q^{\left(\frac{3}{2}\right)}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^{\left(\frac{3\,k}{2}\right)} = \frac{1-a^n}{1-a}$.

En écrivant $1 - a = 1 - \sqrt{q}^3 = (1-\sqrt{q})\,(1+\sqrt{q}+q)et1 - q = (1-\sqrt{q})\,(1+\sqrt{q})$ on obtient : $S_n = \dfrac{(1-\sqrt{q}^{(3\,n)})\,(1+\sqrt{q})(x\,\sqrt{x})}{1+\sqrt{q}+q}$ dont la limite quand n tend vers l'infini est $\dfrac{(1+\sqrt{q})\,x\,\sqrt{x}}{1+\sqrt{q}+q}$.

On termine, en faisant tendre vers *1* la raison q, et on obtient $\dfrac{2\,x\,\sqrt{x}}{3}$.

La limite de T_n étant $\dfrac{q\,(1+\sqrt{q})\,x\,\sqrt{x}}{1+\sqrt{q}+q}$ et celle du terme complémentaire $q^n\,x\,\sqrt{q^n\,x}$ étant nulle on en déduit $A = \dfrac{2\,x\,\sqrt{x}}{3}$.

Cas de la parabole d'équation $\mathbf{y = x^2}$:

On notera, comme précédemment, $S_n$etT_n la somme des aires des rectangles situés respectivement sous la parabole et au-dessus d'elle et A l'aire sous la parabole. On a alors l'encadrement suivant : $S_n < A$ et $A < T_n + q^n\,x\,(q^n\,x)^2$.

On trouve pour S_n etT_n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (q^k\,x - q^{(k+1)}\,x)\,(q^{(k+1)}\,x)^2$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (q^k\,x - q^{(k+1)}\,x)\,(q^k\,x)^2$ ce qui donne après mise en facteur des puissances de q : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^{(3\,k+2)}\,(1-q)\,x^3$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^{(3\,k)}\,(1-q)\,x^3$ (on constate aussi que$S_n = q^2\,T_n$, ce qui était prévisible géométriquement). On termine le calcul en prenant $a = q^3$ ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^{(3\,k)} = \frac{1-a^n}{1-a}$ puis comme $1 - a = 1 - q^3 = (1-q)\,(1+q+q^2)$ on obtient : $S_n = (1 - q^{(3\,n)})\,\dfrac{x^3}{1+q+q^2}$.

Quand n tend vers l'infini, la limite de S_n est $\dfrac{x^3}{1+q+q^2}$, celle de T_n est $\dfrac{q^2\,x^3}{1+q+q^2}$ et celle de $q^n\,x\,(q^n\,x)^2$ est nulle. On en déduit l'encadrement suivant : $\dfrac{x^3}{1+q+q^2} < A < \dfrac{q^2\,x^3}{1+q+q^2}$ valable pour toute valeur de $q < 1$.

En faisant tendre q vers 1 on en déduit $A = \dfrac{x^3}{3}$.

1 *Généralisation :*

Dès *1636 Fermat* sait carrer les paraboles d'équations $y = a\,x^m$, comme l'atteste sa correspondance avec *Roberval*. On appliquera la méthode précédente à une courbe d'équation $y = x^m$, avec dans un premier temps, m entier positif, puis ensuite avec un exposant négatif distinct de *-1*.

Cas d'un exposant m positif :

On obtient : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q^k\,x - q^{(k+1)}\,x)\,(q^{(k+1)}\,x)^m = \sum_{k=0}^{n-1} q^{((m+1)\,k+m+1)}\,(1-q)\,x^m$ et :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q^k\,x - q^{(k+1)}\,x)\,(q^k\,x)^m = \sum_{k=0}^{n-1} q^{((m+1)\,k+1)}\,(1-q)\,x^m$$

(on constate encore que $S_n = q^m\,T_n$, ce qui était prévisible géométriquement).

D'autre part le terme complémentaire est $q^n\,x\,(q^n\,x)^m = (q^{(m+1)})^n\,x^{(m+1)}$ et la suite géométrique qui permet d'obtenir la limite de S_n(resp.T_n) est de raison $a = q^{(m+1)}$ et de premier terme $q^{(m+1)}$ (resp. q).

Quand n tend vers l'infini, la limite de S_n est $\dfrac{q^{(m+1)}\,x^{(m+1)}}{1+q+\ldots+q^m}$, celle de T_n est $\dfrac{q\,x^{(m+1)}}{1+q+\ldots+q^m}$ et celle du terme complémentaire $(q^{(m+1)})^n\,x^{(m+1)}$ est nulle.

On en déduit l'encadrement suivant : $\dfrac{q^{(m+1)}\,x^{(m+1)}}{1+q+\ldots+q^m} < A < \dfrac{q\,x^{(m+1)}}{1+q+\ldots+q^m}$ valable pour toute valeur de $q < 1$.

En faisant tendre q vers 1 on en déduit $A = \dfrac{x^{(m+1)}}{m+1}$.

Cas d'un exposant négatif distinct de -1 :

Pour un exposant négatif, on utilisera de préférence une équation de la courbe sous la forme $y = \dfrac{1}{x^m}$ avec m positif distinct de 1. La convergence des séries géométriques que l'on rencontrera impose de prendre
$q < 1$ si $m < 1$ et de prendre $q > 1$ si $m > 1$. Dans les deux cas on notera A_n l'aire située sous « l'hyperbole » et limitée par les verticales passant par les points d'abscisses x et $q^n\,x$. On notera S_n et T_n la somme des aires des rectangles situés respectivement sous « l'hyperbole » et au-dessus d'elle. On obtient suivant le cas desfigures assez différentes des précédentes.

Ex 1 : m $= \sqrt{2}$, pour « l'hyperbole » d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ on a :

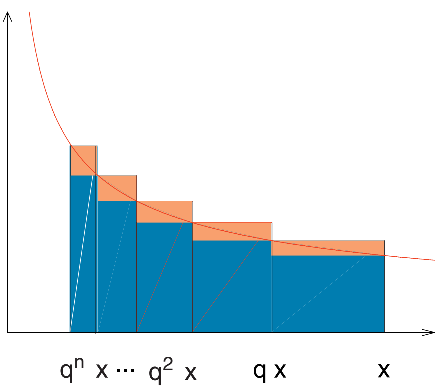

fig. 6

Ex 2 : m = 2 , et pour « l'hyperbole » d'équation $y = \frac{1}{x^2}$ on a :

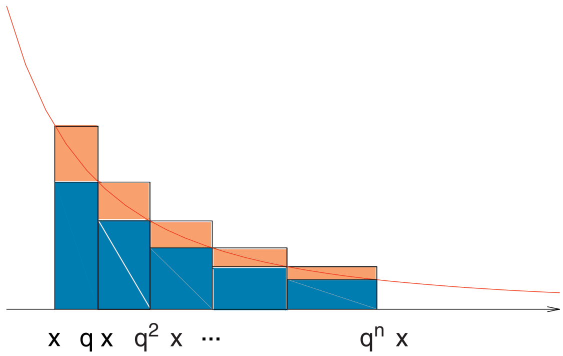

fig. 7

Ces figure mettent en évidence l'encadrement : $S_n < A_n < T_n$.

On peut appliquer, à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x^m}$ (m entier positif), un calcul analogue au précédent :
$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{(k+1)}\,x - q^k\,x}{(q^{(k+1)}\,x)^m} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{((1-m)\,k+1-m)}\,(q-1)}{x^{(m-1)}}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{(k+1)}\,x - q^k\,x}{(q^k\,x)^m} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{((1-m)\,k+1)}\,(q-1)}{x^{(m-1)}}$
(on constate encore que$S_n = \frac{T_n}{q^m}$, ce qui était prévisible géométriquement).

La suite géométrique, qui permet d'obtenir la limite de S_n(resp.T_n), est de raison $a = (\frac{1}{q})^{(m-1)}$ et de premier terme $\frac{1}{q^{(m-1)}}$ (resp. q). A noter, que les valeurs choisies pour q en fonction de la place de m par rapport à *1* assurent la convergence de la série géométrique. A noter, aussi, qu'il n'y a pas, dans ces deux cas, de terme complémentaire.

Quand n tend vers l'infini, la limite de S_n est :

$$\frac{q-1}{q^{(m-1)}\,(1-a)\,x^{(m-1)}} = \frac{q-1}{(q^{(m-1)}-1)\,x^{(m-1)}} = \frac{1}{(q^{(m-2)}+ ... +q+1)\,x^{(m-1)}},$$

celle de T_n est : $\frac{q^m}{(q^{(m-2)}+ ... +q+1)\,x^{(m-1)}}$.

En faisant tendre la raison q vers *1* on obtient une limite commune aux deux expressions précédentes, la valeur : $A = \frac{1}{(m-1)\,x^{(m-1)}}$. Cette valeur est en fait $\int_x^{\infty} \frac{1}{t^m}\,dt$ à partir de laquelle on retrouve une primitive de $\frac{1}{x^m}$ par la formule classique :

$$\int_1^x \frac{1}{t^m}\,dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^m}\,dt \text{ - } \int_x^{\infty} \frac{1}{t^m}\,dt = C^{te} \text{ - } A.$$

2 Annexe : la méthode de Blaise Pascal

La parabole étant envisagée comme graphe de la fonction $y = x^2$, *Pascal* utilise des rectangles construits sur des abscisses en progression arithmétique de raison *d*, qui découpent le segment [*0*,*x*] en n intervalles.

Il calcule l'aire du *k-ième* rectangle : $d.\ (kd)^2$, puis la somme de ces aires :
$S = d.\ d^2 + d.\ (2d)^2 + d.\ (3d)^2 \ ... + d.\ (nd)^2 = d^3 + 4\,d^3 + 9\,d^3 + ... + n^2\,d^3 =$
$(\ 1+2^2+3^2+ ... + n^2\ )\ .\ d^3 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}\ d^3 = (\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6})\,d^3.$

Après ce calcul, Pascal s'autorise à négliger les termes de degrés 2 et 1 dans le résultat précédent et ne garde que le terme de degré 3. Avec cette omission la somme $S = \frac{d^3\,n^3}{3} = \frac{(n\,d)^3}{3} = \frac{x^3}{3}$ qui fournit le résultat attendu.

Bibliographie :

[1] Bulletin de la régionale APMEP d'Aix-Marseille, *AixMarseilleVert* n^{o} 1

[2] Amy DAHAN-DALMENICO & Jeanne PEIFFER, Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.(Seuil)