BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2004

MATHÉMATIQUES

Série S.T.T.

« Comptabilité et Gestion »

« Informatique et Gestion »

Durée : 3 heures **Coefficient : 4**

L'usage des instruments de calcul et de dessin est autorisé, ainsi que le formulaire officiel de mathématiques remis avec le sujet.

2 feuilles de papier millimétré sont nécessaires pour traiter ce sujet.

Dès que ce sujet vous sera remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et de dessin est autorisé, ainsi que le formulaire officiel de mathématiques remis avec le sujet.

***

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME

EXERCICE 1 : 5 points

Les résultats (en pourcentage) d'une étude menée pour un Parc Naturel Régional concernant les nouveaux visiteurs en 2003 sont rassemblés dans le tableau suivant. Ils sont partagés entre touristes français et étrangers. Cette étude a été menée pour connaître la raison de la venue de ces touristes.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

	Français	Étrangers	Total
A : Bouche à oreille	30		35
B : Publicité	20	20	
C : Autre			
Total	70		100

1. Compléter le tableau sur la feuille annexe 1.

2. On interroge un touriste au hasard.
   a) Quelle est la probabilité de l'événement F : « cette personne est française » ?
   b) Quelle est la probabilité de l'événement B : « cette personne est venue grâce à la publicité » ?
   c) Comment peut-on noter l'événement : « cette personne est française et elle est venue grâce à la publicité ».
   Quelle est la probabilité de cet événement ?
   d) Comment peut-on noter l'événement : « cette personne est française ou est venue grâce à la publicité ».
   Quelle est la probabilité de cet événement ?

3. On interroge un touriste étranger au hasard.
   Quelle est la probabilité que cette personne soit venue grâce à la publicité ?

4. On interroge au hasard une personne venue grâce au bouche à oreille.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit française ?

EXERCICE 2 : 5 points

L'utilisation de papier millimétré est nécessaire pour traiter cet exercice.

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au centième près.

1. Le loyer de monsieur X est révisé chaque année sur la base de la moyenne de l'indice trimestriel du coût de la construction. Cette moyenne est calculée sur quatre trimestres consécutifs.
Le tableau suivant donne les indices pour chaque trimestre de l'année 2001 :

Trimestres	T 1	T 2	T 3	T 4
Indices	1125	1139	1145	1140

Calculer la moyenne de ces indices.
On obtient ainsi l'indice moyen du 4e trimestre 2001.

2. Le loyer mensuel de monsieur X au 4e trimestre 2000 était de 310 euros.
Lors de la révision de son loyer en 2001, on lui propose un montant s'élevant à :

$$310 \times 1137{,}25 \div 1098.$$

a) Calculer le montant de son nouveau loyer.

b) Quel est le pourcentage d'augmentation ?

3. En observant les pourcentages de variation annuelle des indices moyens, trimestre après trimestre, monsieur X se demande s'il ne pourrait pas estimer la prochaine augmentation de son loyer.

Ces pourcentages sont rassemblés dans le tableau suivant :

Année	2001		2002		
Trimestre	T 3	T 4	T 1	T 2	T 3
Rang x_i	1	2	3	4	5
Variation en pourcentage y_i	+ 4,76	+ 3,57	+ 3,36	+ 2,74	+ 2,12

Ce tableau permet de déterminer le pourcentage d'augmentation du loyer lors des réactualisations. Par exemple le loyer réactualisé sur la base du 4e trimestre 2001 a été calculé ainsi :

$$310 \times 1{,}0357 = 321{,}08$$

a) Représenter le nuage de points M_i de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère orthogonal d'unités :
2 cm pour les abscisses
1 cm pour 0,2 % pour les ordonnées en commençant à 1 %.

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage et le placer dans le repère.

c) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par G et de coefficient directeur égal à $-0{,}61$.
Construire $\mathscr{D}$ dans le repère.

d) Estimer graphiquement le pourcentage correspondant au 4e trimestre 2002 en utilisant la droite $\mathscr{D}$ construite précédemment.
Vérifier le résultat par un calcul.
En déduire l'estimation du nouveau loyer de monsieur X, réactualisé sur la base du 4e trimestre 2002.

PROBLÈME : 10 points

L'utilisation de papier millimétré est nécessaire pour traiter ce problème.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $g(x) = 12x^2 + 17x + 36$.

1. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Calculer la dérivée $g'(x)$ et étudier son signe.

3. Dresser le tableau de variations de g.

4. Calculer $\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $h(x) = 36e^{0,5x}$.

1. Déterminer la limite de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Calculer la dérivée $h'(x)$ et étudier son signe.

3. Dresser le tableau de variations de h.

4. a) Soit H la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $\mathrm{H}(x) = 72e^{0,5x}$
Démontrer que pour tout réel x positif : $\mathrm{H}'(x) = h(x)$

b) En déduire $\int_0^3 h(x)\,\mathrm{d}\,x$.
On donnera le résultat en valeur exacte puis en valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie C

1. Reproduire et compléter le tableau suivant en arrondissant à l'unité.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$							
$h(x)$							

2. Dans un même repère orthogonal représenter les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ de g et $\mathcal{C}_2$ de h.
On prendra pour unités : 2 cm sur l'axe des abscisses
1 cm pour 10 sur l'axe des ordonnées.

<u>Partie D</u> : Application économique

Dans une entreprise, pour une certaine machine, le coût instantané d'entretien est une fonction $f:\ x \mapsto f(x)$ où x représente l'âge de la machine en années et $f(x)$ le coût instantané d'entretien en milliers d'euros.

On sait que cette fonction f est encadrée sur l'intervalle $[0\ ,\ 3]$ par g et h.

Sachant que le coût total d'entretien entre deux années a et b s'exprime par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$, donner un encadrement du coût total d'entretien de cette machine au bout de trois ans en euros.

	Français	Étrangers	Total
A : Bouche à oreille	30		35
B : Publicité	20	20	
C : Autre			
Total	70		100

BACCALAURÉAT, SÉRIES STT spécialités comptabilité et gestion, informatique et gestion

STL spécialité biochimie - génie biologique

STI spécialité arts appliqués

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE *(SÉRIES STL, STT)*

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \ ; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\,1 = 0$

$ln\,e = 1$

$ln\,ab = ln\,a + ln\,b$

$ln\dfrac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\,x = e^x$ équivaut à $x = ln\,y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\,ln\,a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\,a^x = x\,ln\,a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x\to0} ln\,x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln\,x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln\,x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* **(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)**

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

(SÉRIES F12, STL)

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. *CALCUL INTÉGRAL* ***(SÉRIES F12, STT)***

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES* ***(SÉRIE STL)***

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$