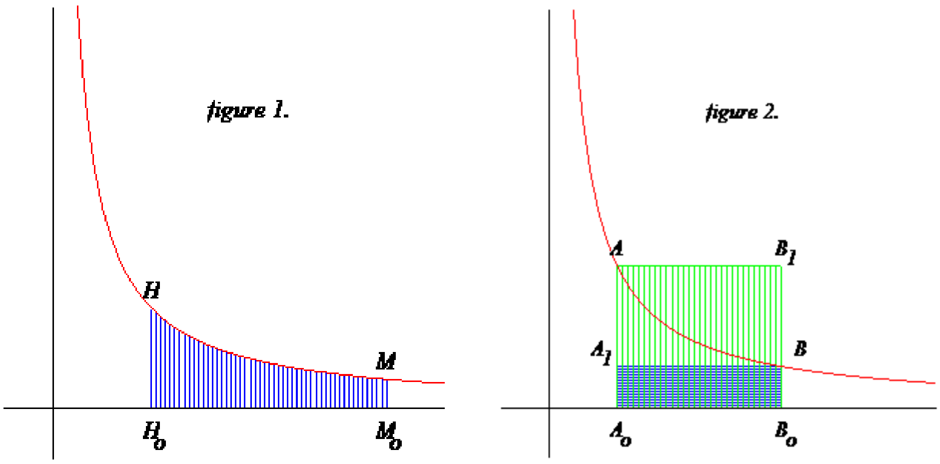
Document de travail

Problème sur la quadrature de l'hyperbole,
suivant la méthode, donnée par le jésuite belge grégoire de Saint Vincent, en 1647.
(Contacts, André BONNET : andre.bonnet9@orange.fr
ou sur le site de la Régionale APMEP : http://www.apmep-aix-mrs.org)

Le but du problème est d'étudier les propriétés de la fonction "qui mesure l'aire sous une hyperbole équilatère".

Plus précisément, si l'hyperbole est donnée, dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), par son équation $x\,y = 1$ et si pour un nombre réel positif x on note H, H_o, M_o, M , les points de coordonnées respectives (1,1), (1,0), (x,0), (x, $\frac{1}{x}$), on cherche à étudier les propriétés de la fonction qui à x associe l'aire du quadrilatère curviligne $H\,H_o\,M_o\,M$ (voir figure 1).

Partie I :



Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que a < b.

1°/ On définit, par leurs coordonnées, les points suivants :

$$A\left(a,\frac{1}{a}\right),\quad B\left(b,\frac{1}{b}\right),\quad A_0(a,0),\quad B_0(b,0),\quad A_1\left(a,\frac{1}{b}\right),\quad B_1\left(b,\frac{1}{a}\right)$$

Calculer les aires des rectangles $A\,A_o\,B_o\,B_1$ et $A_1\,A_o\,B_o\,B$ (voir figure 2).

2°/ Soit r un nombre réel positif non nul. On définit, par leurs coordonnées, les points suivants :

$$A'\left(ra,\frac{1}{ra}\right),\quad B'\left(rb,\frac{1}{rb}\right),\quad A'_o(ra,0),\quad B'_o(rb,0),\quad A'_1\left(ra,\frac{1}{rb}\right),\quad B'_1\left(rb,\frac{1}{ra}\right)$$

Calculer les aires des rectangles $A'\,A'_o\,B'_o\,B'_1$ et $A'_1\,A'_o\,B'_o\,B'$ et comparer les résultats obtenus à ceux trouvés à la question prédédente.

3°/ On note : $\lambda = \dfrac{b}{a}$.

Pour tout entier naturel non nul n, pour tout $k = 0, \dots, n$, on pose : $q_n = \sqrt[n]{\lambda}$ et
$a_k = a\, q_n^{\,k}$.

Enfin, on définit, par leurs coordonnées, les points suivants :

$$M_k\left(a_k, \frac{1}{a_k}\right), \quad m_k(a_k, 0), \quad pour\ k=0,\dots,n$$

$$P_k\left(a_k, \frac{1}{a_{k+1}}\right), \quad Q_k\left(a_{k+1}, \frac{1}{a_k}\right), \quad pour\ k=0,\dots,n-1.$$

a/ Calculer, pour $k = 0, \dots, n$, les aires des rectangles $M_k m_k m_{k+1} Q_k$ et $P_k m_k m_{k+1} M_{k+1}$.

On pose : $R_n = n(q_n - 1)$, $S_n = n\left(1 - \dfrac{1}{q_n}\right)$, $u_n = R_{2^n}$ et $v_n = S_{2^n}$.

b/ Quelles sont les valeurs de u_1 et v_1 .

c/ Faire une figure permettant d'interpréter en termes d'aires les nombres u_1 , u_2 , v_1 et v_2 et comparer ces quatre nombres.

d/ Montrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes.

e/ En déduire la convergence des suites R_n et S_n et donner une interprétation géométrique de la limite de ces suites .

Partie II :

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que a < b.
On note A_a^b l'aire délimitée par l'hyperbole, l'axe horisontal Ox et les droites verticales d'équations $x = a$, $x = b$.

1°/ Montrer que si r est un nombre réel positif non nul, on a : $A_{ra}^{rb} = A_a^b$.

En déduire que, pour tout $x < 1$, $A_x^1 = A_1^{\frac{1}{x}}$.

2°/ On définit la fonction $\mathscr{L}$: $\mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{ll} \forall\, x > 1 \ , & \mathscr{L}(x) = A_1^x \\ \quad x = 1 \ , & \mathscr{L}(x) = 0 \\ \forall\, x < 1 \ , & \mathscr{L}(x) = -A_x^1 \ . \end{array}$$

Montrer que la fontion $\mathscr{L}$ vérifie la propriété suivante :

$\forall$ x > 0, $\forall$ y > 0 , $\mathscr{L}(x\,y) = \mathscr{L}(x) + \mathscr{L}(y)$.

3°/ Montrer que la fonction $\mathscr{L}$ est dérivable et donner l'expression de sa dérivée.

Partie III :

La méthode qui a permi de définir le symbole A_a^b dans les parties I et II et a été proposée par *Grégoire de Saint Vincent* en 1647.

Sa démarche est assez proche de la méthode des rectangles (en abrégé *MdR*), très utilisée en analyse numérique pour le calcul d'une intégrale.

Le but de cette troisième partie est d'adapter son idée au calcul numérique. On se limitera au calcul d'une valeur approchée de A_1^2 par la méthode de Grégoire de Saint Vincent (en abrégé *GdSV*).

1°/ Comparer, la rapidité de convergence de la méthode des rectangles (*MdR*) pour le calcul d'une valeur approchée de $ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x}dx$ à celle de la méthode (*GdSV*) de *Grégoire de Saint Vincent,* pour obtenir $ln(2)$ à partir de A_1^2 .

2°/ Dans la méthode *GdSV* la difficulté est la détermination, pour un n donné et sans l'utilisation des logarithmes, de la valeur de $q_n = \sqrt[n]{\lambda}$.

Par contre, si on donne à q une valeur assez proche de 1, on peut facilement déterminer n, réalisant l'encadrement $q^n \leqslant 2 < q^{n+1}$ en utilisant une itération.

Montrer que l'algorithme fourni ci-dessous, permet la détermination d'un encadrement de $ln(2)$, avec une incertitude qui dépend de la valeur de q donnée au début de l'algorithme.

Algorithme de calcul de ln(2)

```
q  ←  ?
n  ←  0
pn  ←  q
tantque  pn < 2 faire
   pn  ←  pn * q
   n  ←  n + 1
finfaire
R  ←  n * (1-1/q)
S  ←  (n+1)*(q-1)
afficher ( n,  R,  S)
```

3°/ Tester cet algorithme, sur votre calculatrice, pour les valeurs de q égales à 1.1, 1.01, 1.001 et 1.0001.

Programmer la méthode des rectangles (*MdR*), pour obtenir une valeur approchée de $ln(2)$ par le calcul d'une intégrale, avec pour le nombre de rectangles les valeurs de n trouvées par l'algorithme ci-dessus.

Conclusions ?